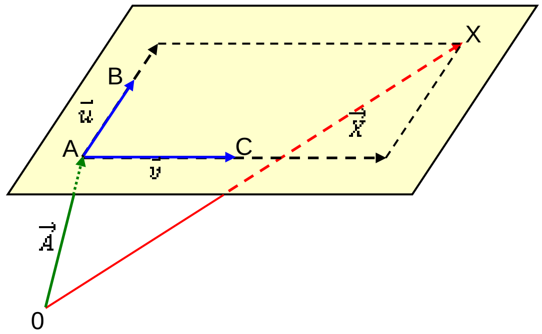
Ebenen

Eine Ebene im Raum ist eindeutig festgelegt durch:
- drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen
- zwei sich schneidende Geraden
- zwei echt parallele Geraden
- eine Gerade g und einen Punkt P mit P $\notin$ g

Darstellung von Ebenen in Parameterform



Ebene in Parameterform

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ seien linear unabhängige Vektoren.
Alle Punkte X mit dem Ortsvektor $\vec{x}$ mit

$$\vec{X} = \vec{A} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \text{ bzw.}$$

$$\vec{X} = \vec{A} + r \cdot \left(\vec{B} - \vec{A}\right) + s \cdot \left(\vec{C} - \vec{A}\right)$$

bilden eine Ebene durch den Punkt A.

Musteraufgaben

1. Ebene, die durch drei Punkte festgelegt ist

   Die Punkte A(4|1|4), B(2|5|0) und C(-1|3|3) legen eine Ebene fest.

a) Geben Sie eine Ebenengleichung von E in Parameterform an.

b) Prüfen Sie, ob der Punkt P(-2|5|2) in der Ebene liegt.

2. Ebene, die durch zwei sich schneidende Geraden festgelegt ist

   Prüfen Sie, ob die beiden Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Ebene festlegen. Geben Sie gegebenenfalls eine Gleichung dieser Ebene in Parameterform an.

3. Ebene, die durch zwei parallele, aber nicht identische Geraden festgelegt ist

   Gegeben seien die beiden Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$.

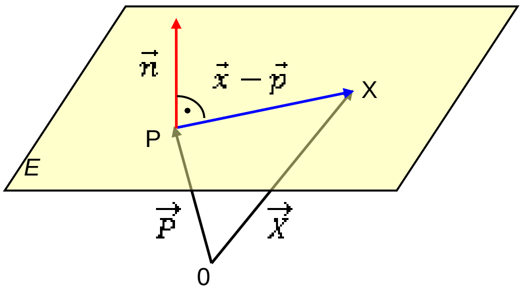
   Weisen Sie nach, dass die beiden Geraden parallel, aber nicht identisch sind und geben Sie eine Gleichung der durch g und h festgelegten Ebene E in Parameterform an.

4. Ebene, die durch eine Gerade g und einen Punkt P außerhalb von g festgelegt ist

   Prüfen Sie, ob durch die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und den Punkt P(4|-2|1)

   eine Ebene festgelegt wird und geben Sie eine Gleichung in Parameterform an.

Darstellung von Ebenen in Normalenform



Ebene in Normalenform

Ist P ein Punkt einer Ebene E und $\vec{n}$ ein Vektor, der senkrecht (normal) zur Ebene E ist, dann gilt für alle Punkte X der Ebene:

$(\vec{X} - \vec{P}) \circ \vec{n} = 0$ (Vektordarstellung)

bzw.

$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + d = 0$ (Koordinatendarstellung)

__**Beispiel:**__ E: $2\,x_1 + 3\,x_2 - 4\,x_3 + 7 = 0$

Umwandlung der Parameterform in die Normalenform

1. Wähle den Aufpunkt der Ebene in Parameterform als Aufpunkt der Ebene in Normalenform.
2. Bestimme mit dem Vektorprodukt den Normalenvektor: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

__**Musteraufgabe**__

Bestimmen Sie für die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ die Normalenform in Vektor- und Koordinatenschreibweise.

Umwandlung der Normalenform in die Parameterform:

1. Suche drei Punkte, die die Ebenengleichung in Koordinatendarstellung erfüllen.
2. Stelle wie gewohnt eine Ebene in Parameterform auf, die die drei Punkte enthält.

__**Musteraufgabe**__

Geben Sie die Gleichung der Ebene E: $2\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 - 12 = 0$ in Parameterform an.