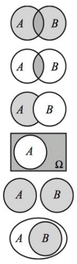
Stochastik

GRUNDBEGRIFFE

VERKNÜPFUNGEN VON EREIGNISSEN



- Vereinigungsereignis: $A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$
  A tritt ein oder B tritt ein.
- Durchschnittsereignis: $A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
  A tritt ein und B tritt ein.
- Differenzereignis: $A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
  A tritt ein, aber B tritt nicht ein.
- Komplementärereignis: $\bar{A} = \Omega \setminus A$
  A tritt nicht ein. (auch Gegenereignis genannt.)
- Disjunkte Ereignisse: $A \cap B := \varnothing$
  Entweder tritt A oder B ein oder keins von beiden.
- Teilmenge: $B \subset A$ (B ist Teilmenge von A)

WAHRSCHEINLICHKEITSBEGRIFF

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$ Normierung und $P(\{\}) = 0$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (Additionssatz)
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ (Gegenwahrscheinlichkeit)

außerdem:

$$P(A \cup B \cup C)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ Wahrscheinlichkeit der Differenzmenge)

LAPLACE

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der gewünschten Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

i Die Wahrscheinlichkeit aller möglichen Ergebnisse sind gleich

z.B. Werfen einer Münze / Würfel → Ereignis, dass bei einmaligen Würfen nur 2 oder 4 gewürfelt wird

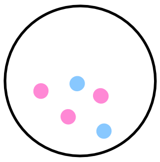
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{2;4\}$

$P(A) = \frac{1}{3}$

BAUMDIAGRAMME

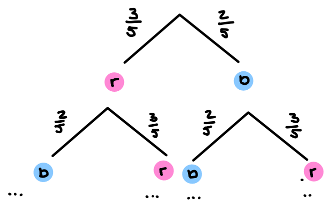
ZIEHEN MIT ZURÜCKLEGEN



$P(r) = \frac{3}{5}$ $\quad$ $P(b) = \frac{2}{5}$

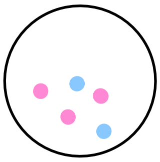
-> zurücklegen -> Ausgangssituation

=> immer gleiche Wahrscheinlichkeit



MBaR $\boxed{|\Omega| = n^k}$ $\qquad$ OBaR X

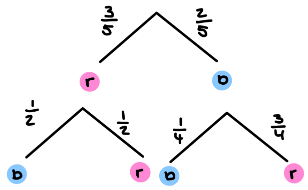
ZIEHEN OHNE ZURÜCKLEGEN



1. Zug: $P(r) = \frac{3}{5}$ $\quad$ $P(b) = \frac{2}{5}$

2. Zug: $P(r) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $P(b) = \frac{1}{2}$

=> neue Wahrscheinlichkeit



z.B.: $P(r,r) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ $\qquad$ oder $\qquad$ $P(b) = P(r,b) + P(b,r) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$

MBaR $\boxed{|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!}}$ $\qquad$ OBaR $\boxed{|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$

Wahrscheinlichkeit für Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge bei nur 2 unterscheidbaren Ergebnisarten

gez. rote Kugeln $\qquad$ rote Kugeln in der Urne

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Kugeln in der Urne $\qquad$ Anzahl der Züge

PFADREGELN

1. Produktregel

→ Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses in einem mehrstufigen Vorgang ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeit längs des Pfades, der diesem Ergebnis entspricht.

z.B.: P, dass 2 rote Kugeln gezogen werden

→ $P(r,r) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

2. Summenregel

→ Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses in einem mehrstufigen Vorgang ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der für dieses Ergebnis günstigen Pfade.

z.B.: P, dass genau 1 rote Kugel gezogen wird

$P(r,b) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

$P(b,r) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$

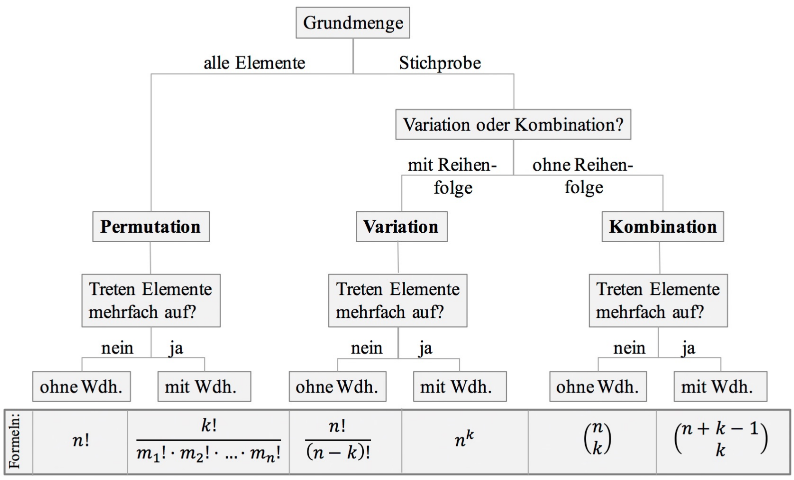
$P(r,b) + P(b,r) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$

KOMBINATORIK

BINOMIALKOEFFIZIENT

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ Auswahl der Kugeln ist eine Ziehung einer Zufallsstichprobe des Umfangs k aus einer Gesamtheit n.

Die Anzahl der Möglichkeiten hängt von der Reihenfolge der n nummerierten gezogenen Elemente (mit / ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) und ob die Elemente nach der Ziehung zurückgelegt werden oder nicht (mit / ohne zurücklegen)



z.B.:

Peter hat ein Zahlenschloss mit vier Ziffern. Er hat bei den ganzen Abiparties seinen Code vergessen. Er fragt sich nun, wie viele Möglichkeiten er hat, um sein Schloss wieder zu öffnen.

1. Betrachtung aller Elemente oder nur Stichprobe?
   → Stichprobe, da: Ziffern von 0-9, aber nur Nutzung von 4 Ziffern

2. Ist Reihenfolge oder Anordnung wichtig?
   → ja

3. Wiederholung möglich?
   → Ja

⟶ n^k → $10^4 = 1000$ Möglichkeiten

ZUFALLSGRÖßEN

= Eine Zufallsvariable (x) ist eine Funktion, die den Ergebnissen eines Zufallsexperimentes reelle Zahlen zuordnet

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad X: \omega \rightarrow X(\omega) = x$$

z.B.: Ein Würfel wird 2 mal geworfen mit der Zufallsvariable „X = Augensumme"

e_i	(1|1)	(1|2)	(2|1)	(2|2)	...	(6|6)
$X(e_i) = x_i$	2	3	3	4	...	12

Elementarereignisse

Realisation

WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG

Werte der Zufallsgrößen können Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden.
→ Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(X = x)$ der Zufallsgröße X

Wird die Wahrscheinlichkeit bis zum Wert der Zufallsgröße addiert, so erhält man die
→ Kumulative Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$ der Zufallsgröße X

z.B.: siehe oben

→ Die Realisation „3" kann durch verschiedene Kombinationen erreicht werden.
(2|1), (1|2). Aus der Anzahl der Elementarereignisse ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{36}$.

ERWARTUNGSWERT, VARIANZ & STANDARDABWEICHUNG

ERWARTUNGSWERT

→ beschreibt die Zahl, die die Zufallsgröße im Mittel annimmt

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \underbrace{P(X = x_i)}_{= p_i} = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots x_k \cdot p_k$$

VARIANZ

→ beschreibt die Streuung einer ZG; hängt nicht vom Zufall ab

$$\sigma^2 = V(x) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$$

Verschiebungssatz: $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$

STANDARDABWEICHUNG

→ positive Wurzel der Varianz

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\sigma^2}$$

BERNOULLI & BINOMIALVERTEILUNG

BERNOULLI

Zufallsexperiment mit 2 Ergebnissen mit den Wahrscheinlichkeiten p und $1-p$; Ziehen mit Zurücklegen

n = Anzahl der Ziehungen
p = Wahrscheinlichkeit
k = Anzahl der Treffer

$$\boxed{p(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \ (1-p)^{n-k}}$$

BINOMIALVERTEILUNG

Die n-malige Wiederholung eines Bernoulli Experiments

genau k-Treffer: $\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$

höchstens k-Treffer: $\boxed{P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \ (1-p)^{n-i}}$

ERWARTUNGSWERT, VARIANZ & STANDARDABWEICHUNG

ERWARTUNGSWERT

$\mu = E(X) = n \cdot p$

VARIANZ

$\sigma^2 = V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

STANDARDABWEICHUNG

$\sigma = \sqrt{\sigma} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

FRAGESTELLUNGEN

genau k-Treffer: $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

höchstens k-Treffer $P(X \leq k)$

weniger als k-Treffer $P(X<k) = P(X \leq k-1)$

mind. k-Treffer $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$

mehr als k-Treffer $P(X>k) = 1 - P(X \leq k)$

mind. k, aber höchstens n Treffer $P(k \leq X \leq n) = P(X \leq n) - P(X \leq k-1)$