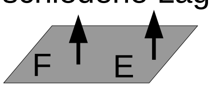
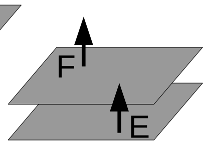
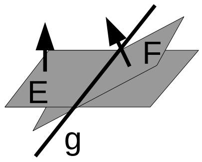
G7 Gegenseitige Lage von Ebenen

- Zwei Ebenen E und F können drei verschiedene Lagebeziehungen zueinander haben:
  - E und F sind identisch: $E=F$ 

  - E ist (echt) parallel zu F: $E \parallel F$ 

  - E und F schneiden sich in Gerade g: $E \cap F = g$ 

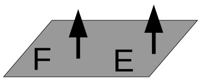
- Vorgehen für die Ebenen $E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$ und $F: \vec{m} \circ (\vec{X} - \vec{B}) = 0$

Sind $\vec{n}$ und $\vec{m}$ linear abhängig?
$\vec{n} \parallel \vec{m}$?

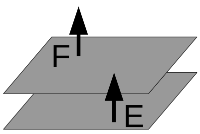
ja → E parallel zu F

Liegt A in F (oder B in E)?
(Punktprobe)

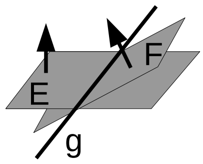
ja → E = F
identisch



nein → E || F
(echt) parallel



nein → E nicht parallel zu F → $E \cap F = g$
E und F schneiden sich in g



- Beispiele: Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Ebene $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$ zu
  - $F: \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 0$
  - $F: -0{,}5\, x_1 + x_3 - 1 = 0$
  - $F: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$

Lösungen auf nächster Seite →

- $E: \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\right) = 0$ und $F: \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\right) = 0$ sind identisch E = F, denn:
    - Normalenvektoren sind linear abhängig (also parallel): $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$ $\checkmark$
    - Aufpunkt von E liegt in Ebene F: $\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} = 4 + 0 - 4 = 0$ $\checkmark$

- $E: \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\right) = 0$ und $F: -0{,}5x_1 + x_3 - 1 = 0$ sind parallel E || F, denn:
    - Normalenvektoren sind linear abhängig (also parallel): $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix}-0{,}5\\0\\1\end{pmatrix}$ $\checkmark$
    - Aufpunkt von E liegt nicht in Ebene F: $-0{,}5 \cdot (-2) + 3 - 1 = 1 + 3 - 1 = 3 \neq 0$ $\lightning$

- $E: \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\right) = 0$ und $F: \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right) = 0$ schneiden sich in einer Gerade, denn:
    - Normalenvektoren sind linear unabhängig (also nicht parallel): $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = \lightning \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
    - Hinweis: Die Schnittgerade g muss im Abitur 2021 **nicht** berechnet werden!