Übung: Ebenen aufstellen

Ⓐ Ebenen – TÜV

! 3 Punkte gegeben:

Prüfen, ob die 3 Punkte auf einer Geraden liegen

a) $A(9|7|5)$, $B(3|1|-1)$, $C(-3|-5|-7)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-9 \\ 1-7 \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3-9 \\ -5-7 \\ -7-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$; d.h. A, B und C liegen auf einer Geraden,

spannen also keine Ebene auf

b) $P(3|2|-1)$, $Q(3|-2|1)$, $R(-3|2|1)$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ -2-2 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -3-3 \\ 2-2 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{PQ} \neq r \cdot \overrightarrow{PR}$; d.h. P, Q und R liegen nicht auf einer Geraden,

sie spannen also eine Ebene auf

Ebenengleichung

z.B.: ! $E: \vec{x} = \vec{P} + r \cdot \overrightarrow{PQ} + s \cdot \overrightarrow{PR}$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{-\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ}} + \mu \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{-\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PR}}$$

Angabe der Normalenform nicht nötig!

! 1 Punkt und 1 Gerade gegeben:

Prüfen, ob der Punkt auf der Geraden liegt

c) $P(-6|2|-2)$; $g: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Aufpunkt ist Ursprung!

P in g: $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \lambda = -2 \\ \rightarrow \lambda = 2 \end{matrix} \Big\} \lightning \Rightarrow P \notin g$

d.h. P und g spannen Ebene auf

Ebenengleichung

z.B.: $E: \vec{x} = \vec{A_g} + \lambda \cdot \vec{u_g} + \mu \cdot \overrightarrow{A_g P}$

$$E: \vec{x} = \underbrace{\lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{g} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{A_g P}}$$