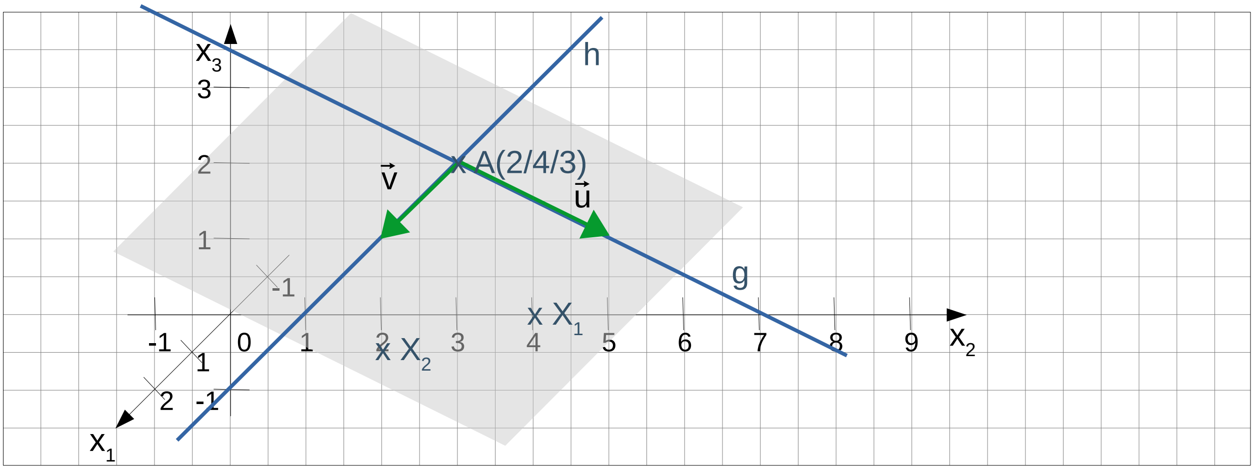
G4 Ebenen im Raum

- Um alle Punkte X auf einer Ebene E zu erreichen, kann man von einem Punkt A der Ebene starten und dann erst in Richtung einer Geraden (also parallel dazu vorwärts oder rückwärts) und anschließend in Richtung einer zweiten Geraden so weit laufen, bis man den gewünschten Punkt erreicht hat.



- Der Punkt X_1 ist also vom Punkt A (=Aufpunkt genannt) aus erreichbar, indem man 1 Mal den Richtungsvektor $\vec{u}$ auf der Geraden g entlang läuft und 1 Mal den Richtungsvektor $\vec{v}$ parallel zur Geraden h entlang läuft.

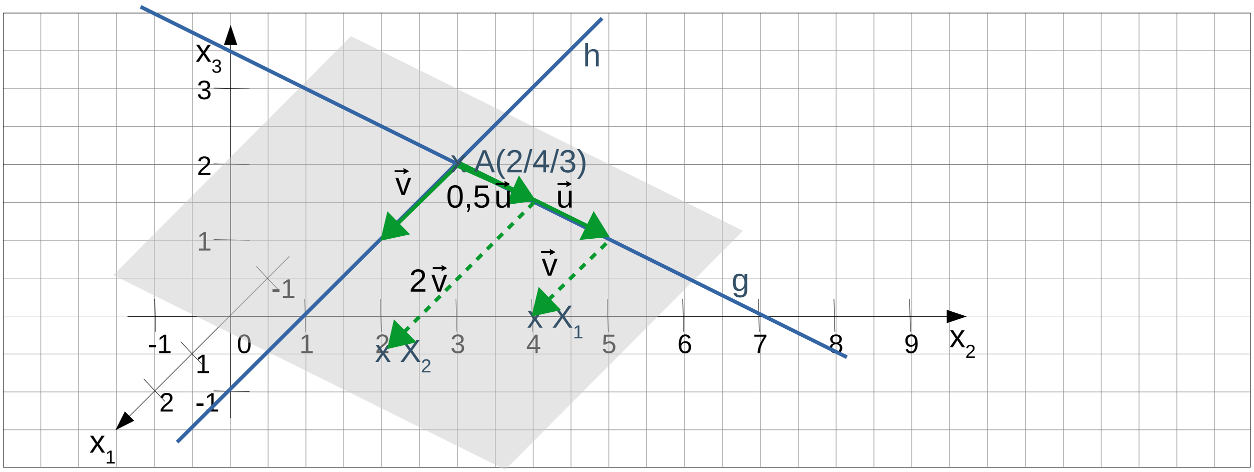
- Wie kommt man vom Aufpunkt A aus zum Punkt X_2?

  Lösung: Indem man vom Punkt A aus 0,5 Mal den Vektor $\vec{u}$ und 2 Mal den Vektor $\vec{v}$.

- Allgemeine Gleichung für alle Punkte X auf der Ebene E, also $X \in E$:

$$E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Punkt X_1 liegt auf Ebene $E: \vec{X_1} = \vec{A} + 1 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ => $X_1(4/6/2)$



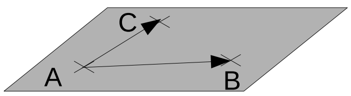
- Wie lauten die Koordinaten vom Punkt X_2?

  Lösung: $E: \vec{X_1} = \vec{A} + 0{,}5 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$ => $X_2(5/6{,}5/3)$

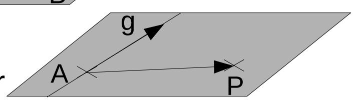
- Besondere Ebenen: Koordinatenebenen
  Aufpunkt ist Ursprung (0/0/0) und Richtungsvektoren besitzen nur eine Koordinate
  - x_1-x_2-Ebene: $\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ oder einfacher: $x_3 = 0$
  - x_1-x_3-Ebene: $\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ oder einfacher: $x_2 = 0$
  - x_2-x_3-Ebene: $\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ oder einfacher: $x_1 = 0$

- Spurgeraden: Schnittgeraden der Ebene mit den Koordinatenebenen
  Vorher Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen bestimmen und je zwei zu den Spurgeraden verbinden.
  Schnittpunkte mit Koordinatenachsen: Zwei Koordinaten 0 setzen und zugehörigen Punkt der Ebene bestimmen
  - Schnittpunkt mit x_1-Achse: $\begin{pmatrix}x_1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\lambda=-\frac{1}{3}\\ \mu=-\frac{11}{3}\end{matrix} \Rightarrow S_1(-12/0/0)$
  - Schnittpunkt mit x_2-Achse: $\begin{pmatrix}0\\x_2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\lambda=\frac{5}{3}\\ \mu=\frac{1}{3}\end{matrix} \Rightarrow S_2(0/6/0)$
  - Schnittpunkt mit x_3-Achse: $\begin{pmatrix}0\\0\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\lambda=-\frac{7}{3}\\ \mu=-\frac{5}{3}\end{matrix} \Rightarrow S_3(0/0/6)$
  - Aus S_1und S_2 ergibt sich Spurgerade g_{12}: $\vec{X}=\vec{S}_1+\lambda\cdot\overrightarrow{S_1S_2}=\begin{pmatrix}-12\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}12\\6\\0\end{pmatrix}$
  - Aus S_1 und S_3 ergibt sich Spurgerade g_{13}: $\vec{X}=\vec{S}_1+\lambda\cdot\overrightarrow{S_1S_3}=\begin{pmatrix}-12\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}12\\0\\6\end{pmatrix}$
  - Aus S_2 und S_3 ergibt sich Spurgerade g_{23}: $\vec{X}=\vec{S}_2+\lambda\cdot\overrightarrow{S_2S_3}=\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\-6\\6\end{pmatrix}$

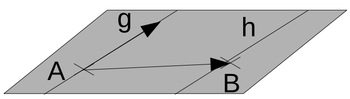
- Wie kann man eine Ebene festlegen?
  - Drei Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen
    => $E:\vec{X}=\vec{A}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}+\mu\cdot\overrightarrow{AC}$



  - Eine Gerade $g:\vec{X}=\vec{A}+\lambda\cdot\vec{u}$ und ein Punkt P, der nicht auf dieser Geraden liegt => $E:\vec{X}=\vec{A}+\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\overrightarrow{AP}$



  - Zwei (echt) parallele Geraden $g:\vec{X}=\vec{A}+\lambda\cdot\vec{u}$ und $h:\vec{X}=\vec{B}+\mu\cdot\vec{u}$
    => $E:\vec{X}=\vec{A}+\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\overrightarrow{AB}$



  - Zwei Geraden $g:\vec{X}=\vec{A}+\lambda\cdot\vec{u}$ und $h:\vec{X}=\vec{B}+\mu\cdot\vec{v}$, die sich im Punkt S schneiden => $E:\vec{X}=\vec{S}+\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{v}$