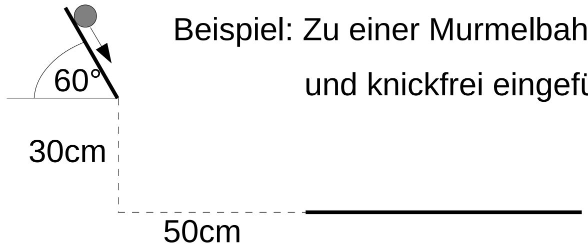
Ganzrationale Funktionen in realen Situationen

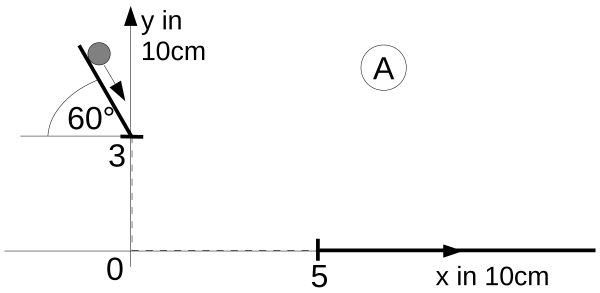
Bestimmung einer ganzrationalen Funktion für reale Situationen:

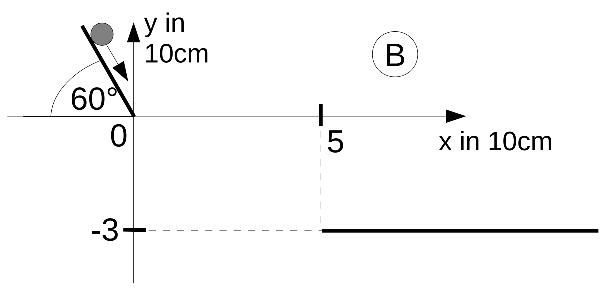
1. Koordinatensystem mit Nullpunkt und Längeneinheiten wählen
2. Allgemeinen Funktionsterm aufstellen, z.B. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
3. Punkte und Steigungen in Funktionsterm einsetzen → Gleichungen
4. Gleichungssystem lösen und Parameter in Funktionsterm einsetzen



Beispiel: Zu einer Murmelbahn soll das fehlende gebogene Stück lückenlos und knickfrei eingefügt werden.

1. Koordinatensystem mit Nullpunkt und Längeneinheiten wählen





Mehrere Möglichkeiten, z.B. untere Bahn auf Höhe Null setzen und Ende der Schräge auf Null in x-Richtung sowie Einheit 1 entspricht 10cm (A) oder Ende der Schräge ist Nullpunkt (B).

2. Allgemeinen Funktionsterm aufstellen

Hier sind vier Angaben gegeben: Zwei Punkte und zwei Steigungen. Allgemein kann man mit n+1 Angaben ein Funktion n-ten Grades eindeutig bestimmen, also mit 4 Angaben eine Funktion 3. Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit Ableitung: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

3. 2 Punkte und 2 Steigungen in Funktionsterm einsetzen → 4 Gleichungen

A		B	
Punkt (0|3) →	I) $3 = a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d$	Punkt (0|0) →	I) $0 = a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d$
Steigung $(0\|-\sqrt{3})$	II) $-\sqrt{3} = 3a\cdot 0^2 + 2b\cdot 0 + c$	→	II) $-\sqrt{3} = 3a\cdot 0^2 + 2b\cdot 0 + c$
Punkt (5|0) →	III) $0 = a\cdot 5^3 + b\cdot 5^2 + c\cdot 5 + d$	Punkt (5|-3) →	III) $-3 = a\cdot 5^3 + b\cdot 5^2 + c\cdot 5 + d$
Steigung (5|0) →	IV) $0 = 3a\cdot 5^2 + 2b\cdot 5 + c$	→	IV) $0 = 3a\cdot 5^2 + 2b\cdot 5 + c$

4. Gleichungssystem lösen und Parameter in Funktionsterm einsetzen

A

Aus I) folgt $d = 3$

Aus II) folgt $c = -\sqrt{3}$

c und d in III) und IV) eingesetzt:

III) $0 = 125a + 25b - 5\sqrt{3} + 3$

IV) $0 = 75a + 10b - \sqrt{3}$

Nun z.B. b eliminieren durch 2·III) – 5·IV)

2·III) $0 = 250a + 50b - 10\sqrt{3} + 6$

5·IV) $0 = 375a + 50b - 5\sqrt{3}$

2·III) – 5·IV) $0 = -125a - 5\sqrt{3} + 6 \quad | +125a$

$125a = -5\sqrt{3} + 6 \quad | :125$

$a = -\frac{\sqrt{3}}{25} + \frac{6}{125}$

a in III) oder IV) einsetzen, z.B. III)

$0 = 125\left(-\frac{\sqrt{3}}{25} + \frac{6}{125}\right) + 25b - 5\sqrt{3} + 3$

$0 = -5\sqrt{3} + 6 + 25b - 5\sqrt{3} + 3 \quad | + 10\sqrt{3} - 9$

$10\sqrt{3} - 9 = 25b \quad | :25$

$2\frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{9}{25} = b$

B

Aus I) folgt $d = 0$

Aus II) folgt $c = -\sqrt{3}$

III) $-3 = 125a + 25b - 5\sqrt{3}$

IV) $0 = 75a + 10b - \sqrt{3}$

Zum Schluss alle Parameter in die Gleichung einsetzen:

$f(x) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{25} + \frac{6}{125}\right)x^3 + \left(2\frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{9}{25}\right)x^2 - \sqrt{3}\,x + 3$

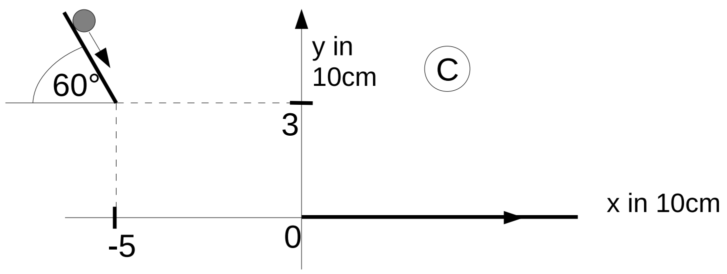
A

B

$f(x) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{25} + \frac{6}{125}\right)x^3 + \left(2\frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{9}{25}\right)x^2 - \sqrt{3}\,x$

Hausaufgabe:

Bestimme den Funktionsterm, wenn der Nullpunkt am Anfang der waagrechten Geraden gewählt wird C.



Lösung: $f(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{175}x^3 + \frac{5\sqrt{3}-9}{175}x^2$

Buch S. 198 / 3, 5

S. 199 / 8a,b