Der Additionssatz

Für disjunkte (überschneidungsfreie) Ereignisse gilt nach dem Axiom III von Kolmogorow:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ (gilt nur wenn $A\cap B$ = { })

1	3	5
2	4	6

Beispiel: Beim Werfen eines Würfels betrachten wir die Ereignisse

A = {1; 3; 5} und B = {4; 6} mit den Wahrscheinlichkeiten

$P(A)=\frac{3}{6}$ und $P(B)=\frac{2}{6}$

Daraus ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B eintritt:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

Nun möchten wir aber auch die Wahrscheinlichkeiten von Vereinigungsmengen nicht disjunkter Ereignisse bestimmen. Dafür verwenden wir den Additionssatz

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

Denn bei nicht überschneidungsfreien Ereignissen würde die Schnittmenge sowohl in P(A) als auch in P(B) doppelt mitgezählt werden, daher muss sie einmal abgezogen werden.

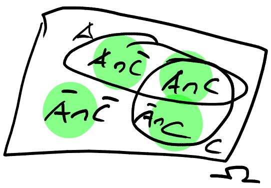
Beispiel von oben mit A = {1; 3; 5} und C = {3; 4; 5; 6}

1	3	5
2	4	6

$P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$, denn $P(A\cap C)$ = {3; 5}

Man kann zur Veranschaulichung auch gut die Vierfeldertafel verwenden:

	C		$\overline{C}$		
A	$P(A\cap C)=\frac{2}{6}$	+	$P(A\cap\overline{C})=\frac{1}{6}$	=	$P(A)=\frac{3}{6}$
	+		+		+
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap C)=\frac{2}{6}$	+	$P(\overline{A}\cap\overline{C})=\frac{1}{6}$	=	$P(\overline{A})=\frac{3}{6}$
	=		=		=
	$P(C)=\frac{4}{6}$	+	$P(\overline{C})=\frac{2}{6}$	=	$P(\Omega)=\frac{6}{6}$



Begriffsklärung:

Häufigkeiten sind Auswertung eines durchgeführten Zufallsexperiments aus der Vergangenheit

- Absolute Häufigkeit: Die Anzahl, wie oft ein Ereignis bei mehrmaligem Durchführen eines Zufallsexperiments eintrat: H(A) : absolute Häufigkeit des Ereignisses A
- Relative Häufigkeit: Das prozentuale Eintreten eines Ereignisses nach n-maligem Durchführen eines Zufallsexperiments: $h(A)=\frac{H(A)}{n}$
- Wahrscheinlichkeit: Vorhersage für die Zukunft, welchen prozentualen Anteil ein Ereignis beim mehrmaligen Durchführen eines Zufallsexperiments haben wird.

Relative Häufigkeiten eines durchgeführten Zufallsexperiment können als Wahrscheinlichkeiten für zukünftige Zufallsexperimente verwendet werden: P(A) = h(A)

Aufgaben:

1. Die Wahrscheinlichkeiten, bei einem zufällig gezogenen Überraschungsei eine Figur zu erhalten ist $P(F)=\frac{1}{7}$, eines der neuen Serie zu erhalten $P(S)=\frac{1}{2}$, eines der neuen Serie mit Figur zu erhalten $P(F\cap S)=\frac{1}{14}$.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, zufällig ein Überraschungsei mit Figur oder der neuen Serie zu ziehen: $P(F\cup S)$

$n=200$

2. Bei 200 Stichproben bei den Hausaufgaben der Schülerinnen und Schüler ergaben sich folgende Ergebnisse: 134 hatten die Hausaufgabe (H), 30 Schülerinnen und Schüler waren aus der Q11 (Q), von denen 20 keine Hausaufgaben hatten.

a) Erstellen Sie eine Vierfeldertafel mit den absoluten und den relativen Häufigkeiten:

abs. H.	Q	$\overline{Q}$	
H	10		
$\overline{H}$	20		
	30		

$\xrightarrow{:200}$ $:n$

rel. H.	Q	$\overline{Q}$	
H			
$\overline{H}$	0,10		
			1,00

Nimmt man diese relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten für zukünftige Befragungen, so kann man die folgenden Wahrscheinlichkeiten bestimmen:

b) Eine zufällig befragte Person
- hat Hausaufgabe und ist in der Q11: $P(H\cap Q) = h_n(H\cap Q) =$
- hat Hausaufgabe und ist nicht in der Q11
- hat die Hausaufgabe nicht und ist nicht in der Q11
- hat die Hausaufgabe nicht
- ist nicht in der Q11

$P(H\cup Q) = P(H)+P(Q) - P(H\cap Q)$

$P(H\cup Q) = P(H\cap Q)+P(H\cap \overline{Q}) + P(\overline{H}\cap Q)$

$= P(H)+P(\overline{H}\cap Q)$

$= P(Q)+P(H\cap \overline{Q})$

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Additionssatzes die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig befragte Person
- die Hausaufgabe hat oder in der Q11 ist: $P(H\cup Q)$ = ...
- die Hausaufgabe nicht hat oder nicht in der Q11 ist
- die Hausaufgabe hat oder nicht in der Q11 ist
- die Hausaufgabe nicht hat oder in der Q11 ist

Bilder aus pixabay.com