

## G3 Gegenseitige Lage von Geraden

Zwei Geraden  $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$  und  $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \vec{v}$

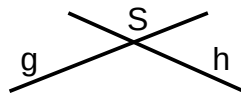
- Zwei Geraden  $g$  und  $h$  können folgende vier Lagebeziehungen zueinander haben:
  - $g = h$  sind identisch



- $g \parallel h$  sind (echt) parallel



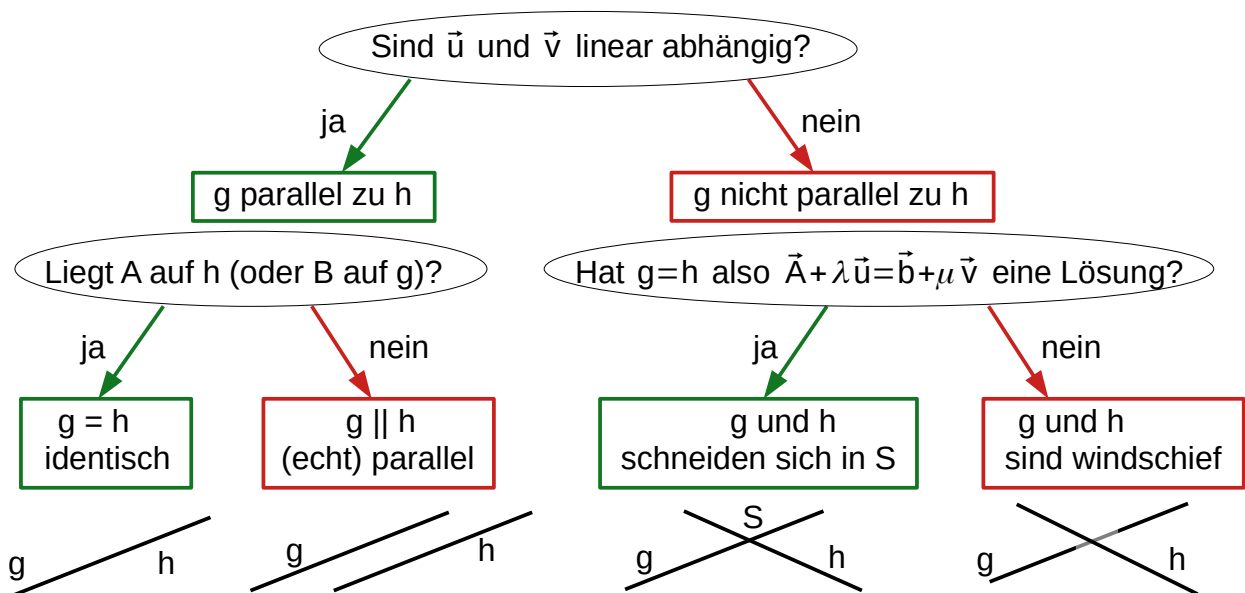
- $g$  und  $h$  schneiden sich in einem Punkt  $S$



- $g$  und  $h$  sind windschief



- Vorgehen für die Geraden  $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$  und  $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \vec{v}$



- Beispiele: Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  zu

- $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

- $m: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $n: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hinweis: Untersucht man die Lagebeziehung zweier Geraden, so müssen die Parameter unterscheidbar sein, daher verwendet man bei der zweiten Gerade den Parameter  $\mu$  statt  $\lambda$ .

Lösungen auf nächster Seite →

- $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$  sind identisch  $g = h$ , denn:

  - Richtungsvektoren sind linear abhängig (also parallel):  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - Aufpunkt von  $g$  liegt auf der Geraden  $h$ :  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit  $\mu = -2$
  
- $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$  sind parallel  $g \parallel h$ , denn:

  - Richtungsvektoren sind linear abhängig (also parallel):  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$
  - Aufpunkt von  $g$  liegt nicht auf Gerade  $k$ :  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$  kein  $\mu$  möglich
  
- $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $m: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  schneiden sich im Punkt  $S(4/3/5)$ , denn:

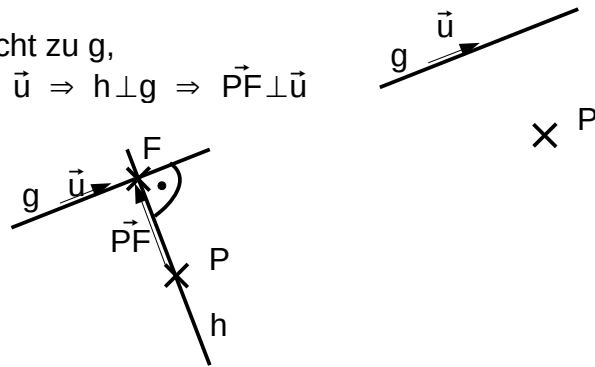
  - Richtungsvektoren sind linear unabhängig (also nicht parallel):  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \text{⚡} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - Die Gleichung  $g=m$  also  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  besitzt die Lösung  $\lambda=-1, \mu=2$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I) } 2 - 2\lambda = 2 + \mu \\ \text{II) } 4 + \lambda = 3 \\ \text{III) } 3 - 2\lambda = 3 + \mu \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I) } \mu = 2 \\ \text{II) } \lambda = -1 \\ \text{III) } \mu = 2 \end{array}$$

Schnittpunkt bestimmen mit  $\lambda=-1$  in  $g$  oder  $\mu=2$  in  $m$ : Schnittpunkt  $S(4/3/5)$
  
- $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $n: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  sind windschief, denn:

  - Richtungsvektoren sind linear unabhängig (also nicht parallel):  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \text{⚡} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - Die Gleichung  $g=n$  also  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  besitzt keine Lösung  $\lambda, \mu$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I) } 2 - 2\lambda = 3 + \mu \\ \text{II) } 4 + \lambda = 3 + \mu \\ \text{III) } 3 - 2\lambda = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I) } \mu = 1 \\ \text{II) } \mu = 0 \\ \text{III) } \lambda = -1 \end{array} \text{⚡}$$

- Besondere Aufgabe: Bestimme Lotgerade h durch Punkt P zu Gerade g

- Die gesuchte Lotgerade h ist senkrecht zu g,  
also senkrecht zum Richtungsvektor  $\vec{u} \Rightarrow h \perp g \Rightarrow \vec{PF} \perp \vec{u}$



- Skalarprodukt zwischen zwei senkrechten Vektoren ist 0  
 $h \perp g \Rightarrow \vec{PF} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{PF} \circ \vec{u} = 0$  wobei F noch unbekannt (X) ist und auf g liegt
- Gleichung lösen und  $\lambda$  in g einsetzen  $\Rightarrow$  Lotfußpunkt F
- Mit P und F die Geradengleichung für h bestimmen

- Beispiel:  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $P(-1/-10/3)$

- $\vec{PF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2\lambda \\ 10-3\lambda \\ -1 \end{pmatrix}$   
 $\vec{F} \quad - \quad \vec{P}$

- $\vec{PF} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} 2+2\lambda \\ 10-3\lambda \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = (2+2\lambda) \cdot 2 + (10-3\lambda) \cdot (-3) + (-1) \cdot 0$   
 $= 4\lambda - 30 + 9\lambda = -26 + 13\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2$

- $\lambda = 2$  in Gerade g einsetzen ergibt F:  $\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Mit P und F die Lotgerade h bestimmen:  $h: \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot \vec{PF}$

$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$