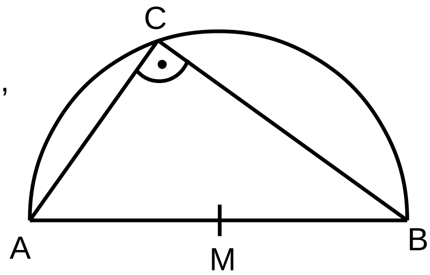
5 Das rechtwinklige Dreieck – Der Satz des Thales

Satz des Thales:

Ein Dreieck ABC hat genau dann einen rechten Winkel bei C, wenn C auf dem Thaleskreis über der Strecke $\overline{AB}$ liegt.

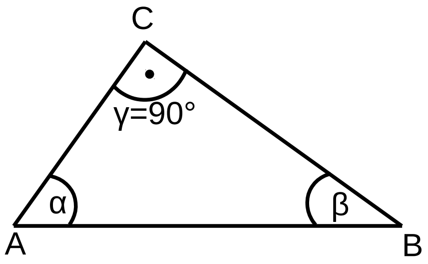
Dreieck ABC hat rechten Winkel bei C

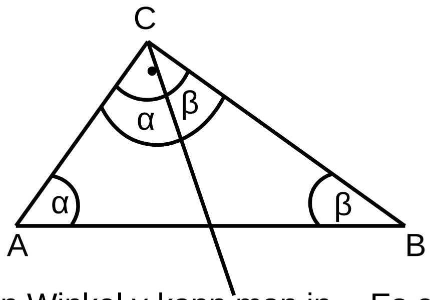
$\Leftrightarrow$ C liegt auf Thaleskreis über $\overline{AB}$.

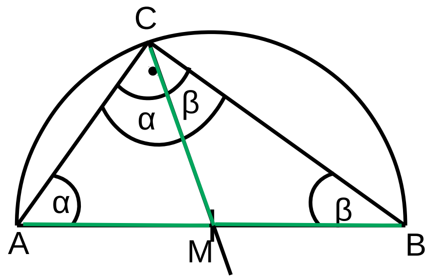


Der Thaleskreis über $\overline{AB}$ ist der Kreis um den Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ durch A und B.

Beweis 1: Dreieck ABC hat rechten Winkel bei C $\Rightarrow$ C liegt auf Thaleskreis über $\overline{AB}$.





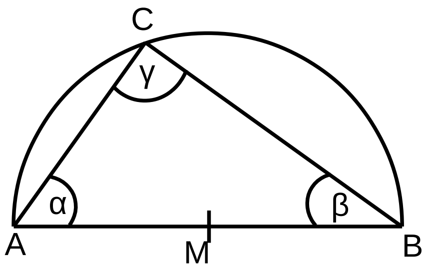


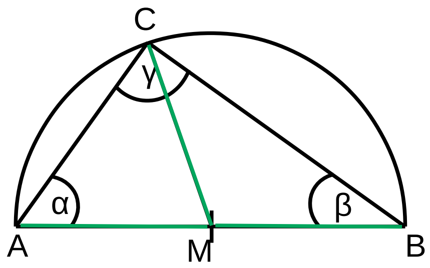
Voraussetzung: Dreieck ABC hat rechten Winkel bei C, also $\gamma = 90°$

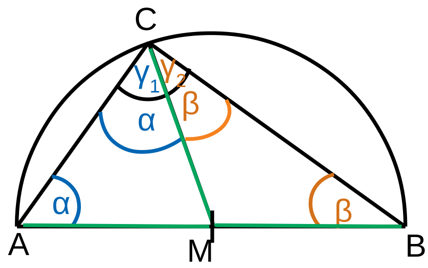
Den Winkel γ kann man in zwei Teilwinkel mit den Größen α und β aufteilen, da $\gamma = \alpha + \beta$ wegen Innenwinkel-summe 180°

Es entstehen zwei gleichschenklige Teildreiecke mit den gleich langen Schenkeln $\overline{AM} = \overline{CM} = \overline{BM}$, damit liegen A, C und B auf einem gemeinsamen Kreis um M mit M ist Mittelpunkt von $\overline{AB}$.

Beweis 2: C liegt auf Thaleskreis über $\overline{AB}$ $\Rightarrow$ Dreieck ABC hat rechten Winkel bei C







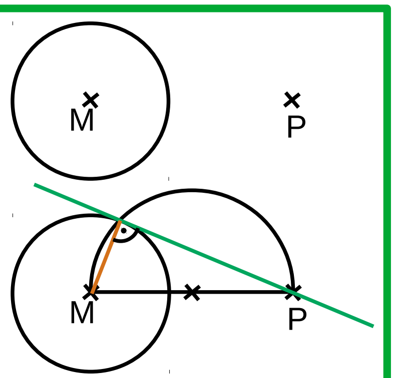
Voraussetzung: Dreieck ABC mit C liegt auf Thaleskreis über $\overline{AB}$

Alle Punkte auf dem Kreis sind vom Mittelpunkt gleich weit entfernt: $\overline{AM} = \overline{CM} = \overline{BM}$

Es entstehen zwei gleichschenklige Teildreiecke mit jeweils gleich großen Basiswinkeln $\alpha = \gamma_1$ und $\beta = \gamma_2$. Mit der Innenwinkelsumme ergibt sich:
$180° = \alpha + \beta + \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma = 2\gamma$,
also $\gamma = 90°$

Konstruktion der Tangente:

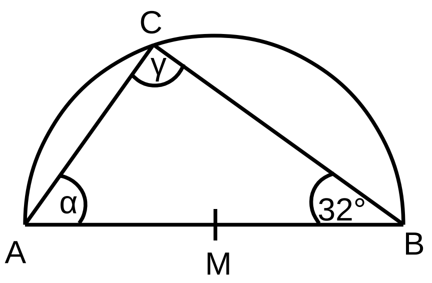
Möchte man von einem Punkt P außerhalb eines Kreises k eine Tangente an k konstruieren, so zeichnet man einen Thaleskreis über $\overline{MP}$ und zeichnet eine Gerade durch P und den Schnittpunkt zwischen k und Thaleskreis. Da dieser Schnittpunkt auf k liegt und senkrecht zum Radius steht, berührt diese Gerade den Kreis k, ist also die gesuchte Tangente.

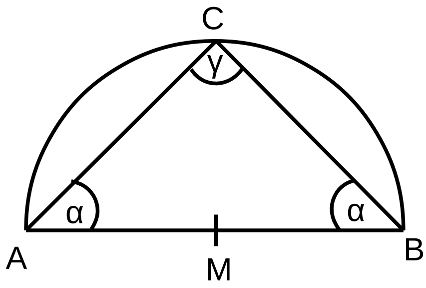


Aufgaben

1. Berechne die fehlenden Winkel

   a)

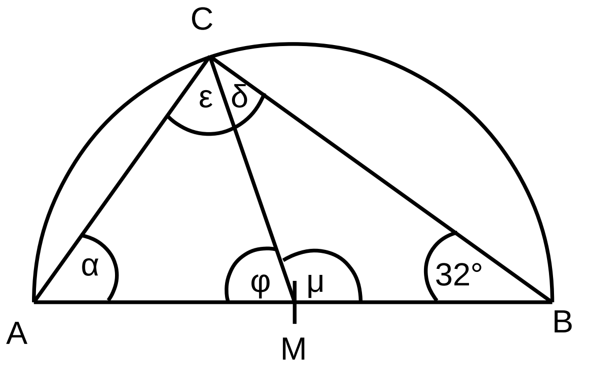




   b)

2. Konstruiere ein Dreieck ABC mit a = 5cm, c = 8cm und γ = 90°.

3. Bestimme die fehlenden Winkel und begründe jeweils.



4. Zeichne den Punkt P(2|–2) und den Kreis k um M(–1|3) mit Radius r = 3cm in ein Koordinatensystem mit 1LE = 1cm. Konstruiere beide Tangenten an k durch P.

5. In der angegebenen Figur sind die Geraden PC und PA jeweils Tangenten an den Kreis k um M mit Radius 2cm. Die Strecken $\overline{MC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BA}$ und $\overline{AM}$ sind alle gleich lang. Bestimme folgende Größen jeweils mit Begründung

   a) Winkel α = ∢PAM
   b) Streckenlänge |$\overline{BM}$|
   c) Winkel γ = ∢MCB
   d) Winkel μ = ∢AMC
   e) Winkel φ = ∢CPA
   f) Für Experten (schwer!): Steckenlänge |BP| (ist in der Skizze nicht eingezeichnet)