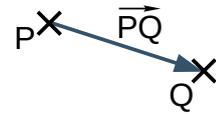


G8 Abstandsmessung im Raum

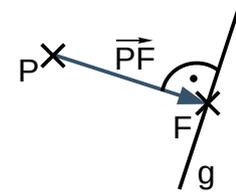
- Abstandsmessungen zwischen Punkten und Geraden sind bereits bekannt und können jeweils auf die Abstandsmessung zwischen zwei Punkten zurückgeführt werden:

- Abstand **Punkt-Punkt**: $d(P, Q) = |\vec{PQ}|$



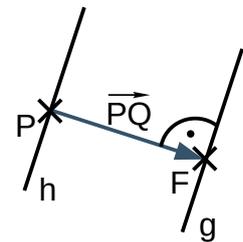
- Abstand **Punkt-Gerade**: $d(P, g) = d(P, F) = |\vec{PF}|$

- Bestimme Lotfußpunkt F auf Gerade g zum Punkt P
 - Hilfsebene H senkrecht zu Gerade g durch Punkt p
 - Hilfsebene H mit Gerade g schneiden ergibt Lotfußpunkt F
- Dann weiter wie unter Punkt-Punkt



- Abstand parallele **Gerade-Gerade**: $d(g, h) = d(P, h) = d(P, F) = |\vec{PF}|$

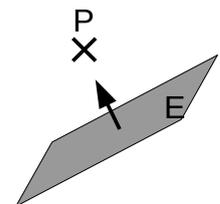
- Wähle beliebigen Punkt P auf Gerade h
- Dann weiter wie unter Punkt-Gerade



- Abstandsmessungen mit einer Ebene kann mithilfe der normierten Hesseschen Normalenform auf Abstandsmessung Punkt-Ebene zurückgeführt werden:

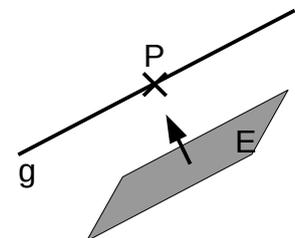
- Abstand **Punkt-Ebene**: $d(P, E) = |\vec{n}_0 \circ (\vec{P} - \vec{A})|$ mit $E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$

- Normalenvektor \vec{n} auf die Länge 1 normieren (Einheitsvektor): $\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$
- Punkt P in normierte Hessesche Normalenform E einsetzen



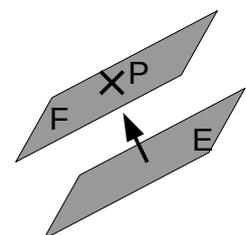
- Abstand parallele **Gerade-Ebene**: $d(g, E) = d(P, E) = |\vec{n}_0 \circ (\vec{P} - \vec{A})|$ mit $E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$

- Wähle beliebigen Punkt P auf Gerade g
- Dann weiter wie unter Punkt-Ebene



- Abstand parallele **Ebene-Ebene**: $d(F, E) = d(P, E) = |\vec{n}_0 \circ (\vec{P} - \vec{A})|$ mit $E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$

- Wähle beliebigen Punkt P auf Ebene F
- Dann weiter wie unter Punkt-Ebene



- Bestimmen Sie den Abstand zwischen den Punkten $P(3|2|-1)$ und $Q(2|0|2)$.

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |\vec{Q} - \vec{P}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

- Bestimmen Sie den Abstand zwischen Punkt $P(-2|1|0)$ und Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lotfußpunkt F ermitteln:

1. Hilfsebene aufstellen: $H: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$

2. Gerade g und Ebene H schneiden: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_g - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ \lambda \\ -2+2\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 0 \cdot 7 + 1 \cdot \lambda + 2 \cdot (-2+2\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda - 4 + 4\lambda = 0 \Rightarrow -4 + 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0,8$$

$$F = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 0,8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1,8 \\ -0,4 \end{pmatrix}$$

3. Abstand zwischen P und F bestimmen:

$$d(P, F) = |\overrightarrow{PF}| = |\vec{F} - \vec{P}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 1,8 \\ -0,4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ 0,8 \\ -0,4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{7^2 + 0,8^2 + (-0,4)^2} = \sqrt{49,8}$$

- Bestimmen Sie den Abstand zwischen Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Wähle beliebigen Punkt auf Gerade h, z.B. Aufpunkt $P(2|1|1)$

Lotfußpunkt F ermitteln:

1. Hilfsebene aufstellen: $H: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$

2. Gerade h und Ebene H schneiden: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_g - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ -1 \\ -1+3\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 1 \cdot (1+\lambda) + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1+3\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \lambda - 3 + 9\lambda = 0 \Rightarrow -2 + 10\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0,2$$

$$F = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,2 \\ 0 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

3. Abstand zwischen P und F bestimmen:

$$d(P, F) = |\overrightarrow{PF}| = |\vec{F} - \vec{P}| = \left| \begin{pmatrix} 3,2 \\ 0 \\ 0,6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1,2 \\ -1 \\ -0,4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1,2^2 + (-1)^2 + (-0,4)^2} = \sqrt{2,6}$$

- Bestimmen Sie den Abstand zwischen Punkt P(3|2|1) und Ebene $E: \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$

Normalenvektor normieren: $|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

P in Hessesche Normalenform einsetzen:

$$d(P, E) = |\vec{n}_0 \circ (\vec{P} - \vec{A})| = \left| \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right| = \left| \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{4}{5} = 0,8$$

- Bestimmen Sie Abstand zwischen $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $E: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 0$

Sind g und E überhaupt parallel?

Dann sind Normalenvektor von E und Richtungsvektor von g senkrecht.

$$\Rightarrow \vec{n} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 + 2 - 6 = 0 \quad \checkmark$$

Wähle beliebigen Punkt auf Gerade g, z.B. Aufpunkt P(-2|1|-4)

Normalenvektor normieren:

$$|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

P in Hessesche Normalenform einsetzen:

$$d(P, E) = |\vec{n}_0 \circ (\vec{P} - \vec{A})| = \left| \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right| = \left| \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \frac{6}{3} = 2$$

- Bestimmen Sie Abstand zwischen $E: \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$ und $F: \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$

Sind g und E überhaupt parallel?

Dann sind Normalenvektoren parallel, also linear abhängig =>

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Wähle beliebigen Punkt auf Ebene F, z.B. Aufpunkt P(3|3|3)

Normalenvektor normieren:

$$|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7 \Rightarrow \vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

P in Hessesche Normalenform einsetzen:

$$d(P, E) = |\vec{n}_0 \circ (\vec{P} - \vec{A})| = \left| \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right| = \left| \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{6}{7}$$