5. Betrag eines Vektors

Es gilt: in R³: $|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Einheitsvektor:

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$\vec{a}^0$ hat dieselbe Richtung und Orientierung wie $\vec{a}$

$\vec{a}^0$ hat die Länge 1

Die Länge einer Strecke [AB] erhält man, indem man den Betrag des Vektors $\overrightarrow{AB}$ berechnet.

6. Das Skalarprodukt

Definition: Für $\vec{a}, \vec{b} \in R^3$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Eigenschaften:

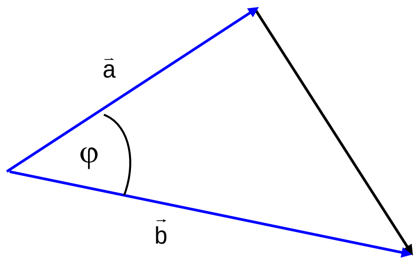
(1): Kommutativgesetz: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$

(2): Assoziativgesetz: $(r \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$

(3): Distributivgesetz: $(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$

Anwendungen:

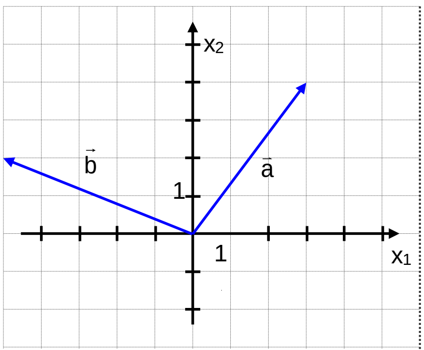
1. Berechnung der Länge eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$



2. Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

(Beweis mit Hilfe des Kosinussatzes)

Beispiel: Berechne den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$!



3. **Satz:** $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$

Beispiel: Zeige, dass die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht orthogonal sind.