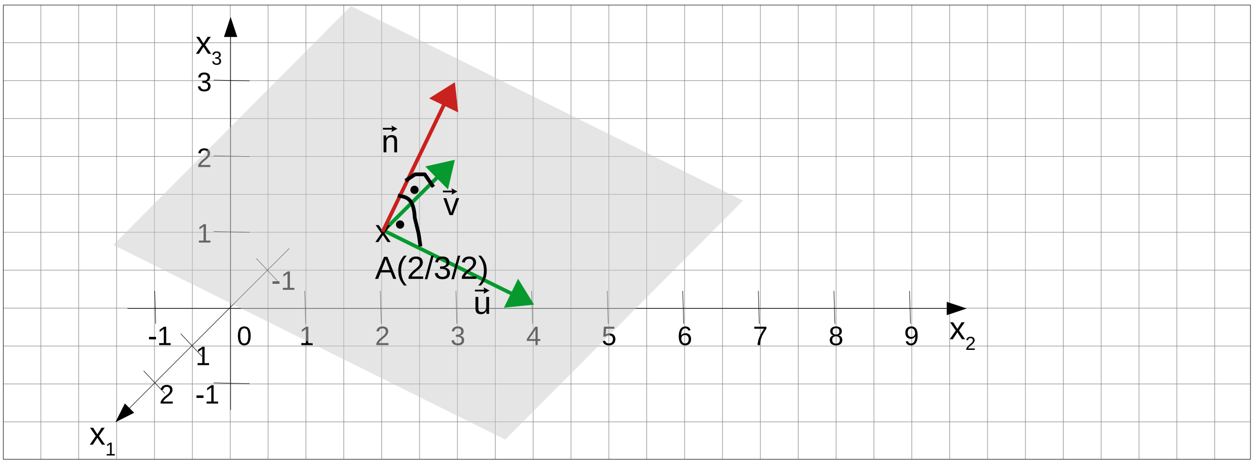
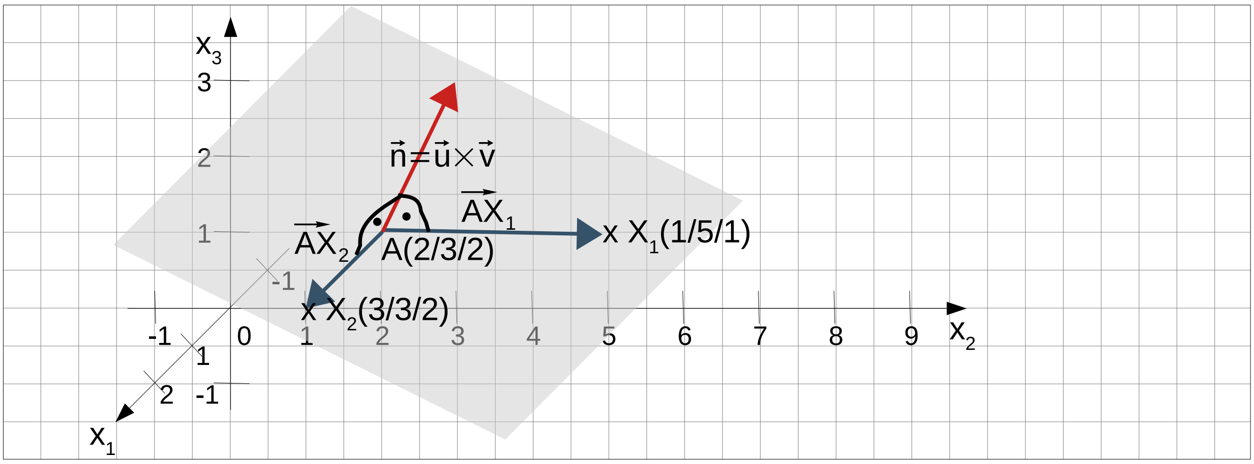
G5 Normalenform der Ebenengleichung

- Neben der Ebenengleichung in Parameterform $E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$ gibt es die Ebenengleichung auch in Normalenform. Man verwendet dazu einen Vektor $\vec{n}$ (=Normalenvektor), der auf die beiden Richtungsvektoren und damit auch auf die Ebene selbst senkrecht steht: $\vec{n} \perp \vec{u}$, $\vec{n} \perp \vec{v}$, $\vec{n} \perp E$



- Beispiel: Ebene $E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- Als Normalenvektor $\vec{n}$ kann das Kreuzprodukt von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ verwendet werden:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 0 \\ (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$, da $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ und $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$



- Alle Verbindungsvektoren vom Aufpunkt A zu einem beliebigen Punkt X liegen in der Ebene und sind damit auch senkrecht zum Normalenvektor: $\vec{n} \perp \overrightarrow{AX_1}$, $\vec{n} \perp \overrightarrow{AX_2}$
- Senkrechte Vektoren ergeben beim Skalarprodukt 0: $\vec{n} \circ \overrightarrow{AX_1} = 0$, $\vec{n} \circ \overrightarrow{AX_2} = 0$
- Damit ergibt sich eine neue Art der Ebenengleichung:
  Wenn der Punkt X in der Ebene E liegt, muss die folgende Gleichung erfüllt sein:
  $E: \vec{n} \circ \overrightarrow{AX} = \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$ Normalenform in Vektordarstellung
- ausmultipliziert: $E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - (n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3 = 0)$ Koordinatendarstellung
- Im Beispiel: $E: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$ und $E: x_2 + 2x_3 - 7 = 0$

  Normalenform in Vektordarstellung — Normalenform in Koordinatendarstellung

- Besondere Ebenen: Koordinatenebenen (vgl. G4)
  - x_1-x_2-Ebene E: $x_3 = 0$ (entsprechend für die anderen Ebenen)

- Besondere Lage im Koordinatensystem:
  - parallel zur x_1-x_2-Ebene und gleichzeitig senkrecht zur x_3-Achse:

    $$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad E: n_3x_3 - n_3a_3 = 0$$

    => Im Normalenvektor 2 Mal Null => parallel zu Ebene, senkrecht zu Achse

  - senkrecht zur x_1-x_2-Ebene und gleichzeitig parallel zur x_3-Achse:

    $$E: \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad E: n_1x_1 + n_2x_2 - (n_1a_1 + n_2x_2) = 0$$

    => Im Normalenvektor 1 Mal Null => senkrecht zu Ebene, parallel zu Achse

- Parameterform aus Normalenform gewinnen:
  - z.B. drei beliebige Punkte der Ebene suchen und aus je zwei Richtungsvektoren berechnen

Aufgaben:

1. Geben Sie die Ebenengleichung der Ebene $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ in Normalenform in Vektor- und in Koordinatendarstellung an.

Lösung:

1. Normalenvektor bestimmen: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-2) - 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
2. Vektordarstellung mit Normalenvektor $\vec{n}$ und Aufpunkt A: $E: \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 0$
3. Koordinatendarstellung durch Ausmultiplizieren: $E: 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3 = 0$

2. Geben Sie die Schnittpunkte der Ebene $E: x_2 - 3x_3 + 6 = 0$ mit den Koordinatenachsen an. Welche besondere Lage hat die Ebene E?

Lösung:

Schnittpunkt mit x_1-Achse: $x_2 = x_3 = 0$ => $6 = 0$ ↯ => kein SP mit x_1-Achse
Schnittpunkt mit x_2-Achse: $x_1 = x_3 = 0$ => $x_2 + 6 = 0$ => $x_2 = -6$ => $SP_2(0/-6/0)$
Schnittpunkt mit x_3-Achse: $x_1 = x_2 = 0$ => $3x_3 + 6 = 0$ => $x_3 = -2$ => $SP_3(0/0/-2)$
x_1-Koordinate fehlt, also $n_1 = 0$ => $E \perp x_2x_3-\text{Ebene}$ und $E \parallel x_1-\text{Achse}$

3. Geben Sie zur Ebene $E: 1x_1 + 2x_2 + 4 = 0$ eine Parameterform an.

Lösung: Drei Punkte auf E finden, die nicht auf einer Geraden liegen, z.B. A(-4/0/0), B(-4/0/4), C(0/-2/0) => $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$