Stochastik

1. **Ereignisse**



1. **Wahrscheinlichkeiten**

Den einzelnen Elementen eines Ergebnisraumes lassen sich Wahrscheinlichkeiten zuordnen.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A wird mit P(A) bezeichnet.

1. Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit

|  |  |
| --- | --- |
| * 0 $\leq $P(A) $\leq $1 für jedes Ereignis A
 | * P ($\overline{A}$) = 1- P(A)
 |
| * P(Ω) = 1 und P({}) = 0
 | * P (A∪B) = P(A) + P(B) – P (A∩B) → Additionssatz
 |
|  |  |

1. Laplace-Experiment

Ein Zufallsexperiment, bei dem alle Elementarereignisse aus Ω gleich wahrscheinlich sind, heißt Laplace-Experiment.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A erhält man in diesem Fall, indem man die Mächtigkeit von A durch die Mächtigkeit von Ω teilt:

 P(A) =$\frac{| A |}{| Ω |}$ = $\frac{Anzahl der günstigen Fälle}{Anzahl der möglichen Fälle}$

1. Vierfeldertafel und Baumdiagramm

 

Zusammenhang:

$ P\_{A}$ ($\overline{B}$)= $\frac{P (A∩\overline{B})}{P (A)}$



1. Stochastische Unabhängigkeit

A und B sind stochastisch unabhängig, wenn P (A∩B) = P(A) \* P(B)

1. Pfadregeln
* Produktregel:

Die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Ergebnisses ist das Produkt entlang des Pfades, der zu diesem Ergebnis führt.

P (A) \* PA (B) = P(A∩B)

* Summenregel:

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die zu diesem Ereignis gehören.

P (A) \* PA (B) + P ($\overline{A}$) \* $P\_{\overline{A}}$ (B) = P(B)

1. **Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung**

Eine Zufallsgröße oder Zufallsvariable ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zu.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten p1, p2, p3, …, pn die Zufallsgröße die möglichen Werte x1, x2, x3, …, xn annimmt.

In Tabellenform:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Xi | X1 | X2 | X3 | … | Xn |
| P (X=Xi) | P1 | P2 | P3 | … | Pn |

Dabei muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten stets 1 ergeben: p1 + p2 + p3 + … + pn = 1

Vorgehensweise:

Werte, die die Zufallsgröße X annehmen kann, auflisten 🡪 Zugehörige Wahrscheinlichkeit berechnen 🡪 ggf. Tabelle erstellen

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

1. Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X gibt an, welcher Mittelwert bei oftmaliger Wiederholung des Zufallsexperiment zu erwarten ist.

E(X)= $\sum\_{i=1}^{n}xi\*pi=x1\*p1\*…\*xn\*pn$

1. Varianz und Standardabweichung

Die Varianz und die Standardabweichung einer Zufallsgröße X erfassen die Streuung der Werte um den Erwartungswert von X.

Var(X) = $\sum\_{i=1}^{n}\left(xi-E\left(X\right)\right)^{2}\*pi$ δ(X) = $\sqrt{Var(X)}$

1. **Bernoulli-Experiment**

Ein Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ergebnissen (Treffer und Niete) nennt man Bernoulli Experiment.

1. Variablen

|  |  |
| --- | --- |
| * Trefferwahrscheinlichkeit: p (konstant)
 | * Länge der Bernoulli Kette: n
 |
| * Wahrscheinlichkeit für eine Niete: q= 1-p
 | * Zufallsgröße: X
 |

1. Binomialverteilte Zufallsgröße

 P(X=k) = B (n; p; k) = $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right)\*p^{k}\*(1-p)^{n-k}$

Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt Binomialverteilung und X binomialverteilt nach B (n; p).

Für eine B (n; p) - verteilte Zufallsgröße X gilt:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Erwartungswert | Varianz | Standardabweichung |
|  E(X)= n\*p | Var(X) = n\*p\*(1-p) | δ(X) = $\sqrt{n\*p\*(1-p}$ |

1. **Kombinatorik/ Urnenmodell**
2. Möglichkeit

Alle Elemente aus der Gesamtmenge n werden berücksichtigt: Permutation → $n!$

Ausgewählte Elemente k aus der Gesamtanzahl n werden berücksichtigt:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Mit Beachtung der Reihenfolge (mBdR)/ Variation  | Ohne Beachtung der Reichenfolge (oBdR)/ Kombination |
| Mit Zurücklegen (mZ) | $$n^{k}$$ | - |
| Ohne Zurücklegen (oZ) | $$\frac{n!}{\left(n-k\right)!}$$ | $$\frac{n!}{\left(n-k\right)!\*k!}= \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right)$$ |

= Binomialkoeffizient