

5 Das rechtwinklige Dreieck – Der Satz des Thales

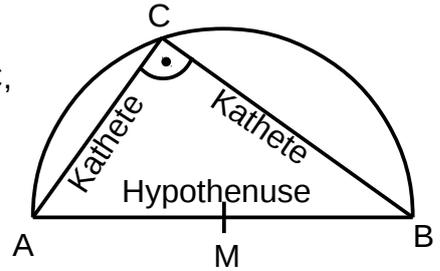
Satz des Thales:

Ein Dreieck ABC hat genau dann einen rechten Winkel bei C, wenn C auf dem Thaleskreis über der Strecke AB liegt.

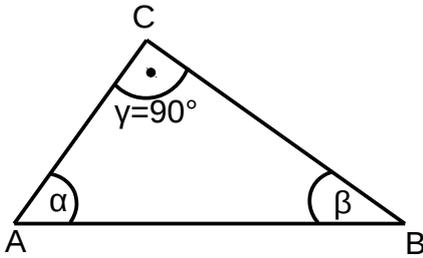
Dreieck ABC hat rechten Winkel bei C

\Leftrightarrow C liegt auf Thaleskreis über \overline{AB} .

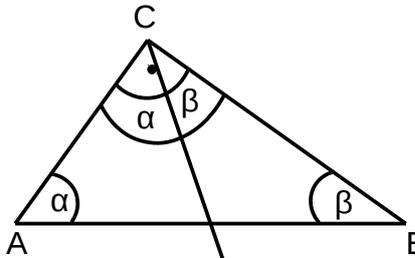
Der Thaleskreis über \overline{AB} ist der Kreis um den Mittelpunkt M von \overline{AB} durch A und B.



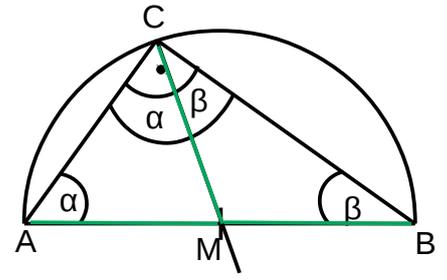
Beweis 1: Dreieck ABC hat rechten Winkel bei C \Rightarrow C liegt auf Thaleskreis über \overline{AB} .



Voraussetzung: Dreieck ABC hat rechten Winkel bei C, also $\gamma = 90^\circ$

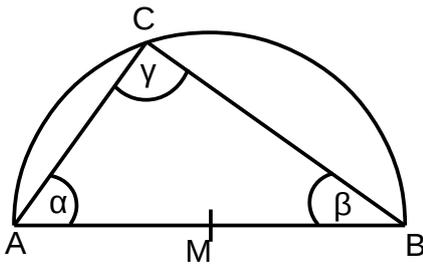


Den Winkel γ kann man in zwei Teilwinkel mit den Größen α und β aufteilen, da $\gamma = \alpha + \beta$ wegen Innenwinkel-summe 180°

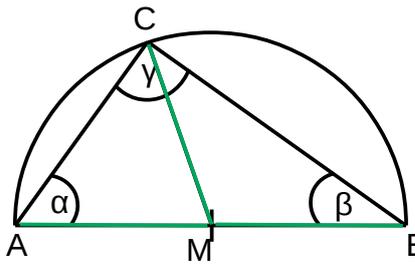


Es entstehen zwei gleichschenklige Teildreiecke mit den gleich langen Schenkeln $\overline{AM} = \overline{CM} = \overline{BM}$, damit liegen A, C und B auf einem gemeinsamen Kreis um M mit M ist Mittelpunkt von \overline{AB} .

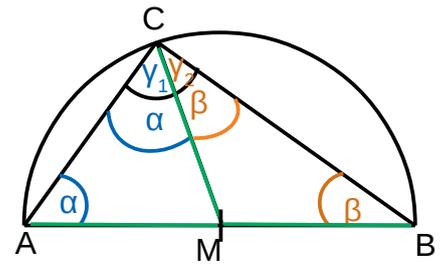
Beweis 2: C liegt auf Thaleskreis über $\overline{AB} \Rightarrow$ Dreieck ABC hat rechten Winkel bei C



Voraussetzung: Dreieck ABC mit C liegt auf Thaleskreis über \overline{AB}



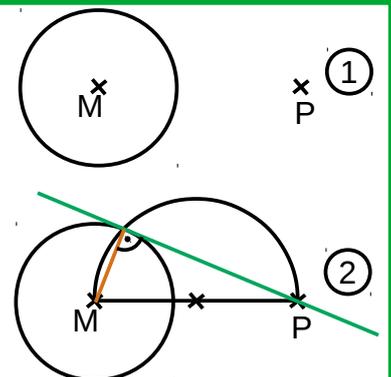
Alle Punkte auf dem Kreis sind vom Mittelpunkt gleich weit entfernt: $\overline{AM} = \overline{CM} = \overline{BM}$



Es entstehen zwei gleichschenklige Teildreiecke mit jeweils gleich großen Basiswinkeln $\alpha = \gamma_1$ und $\beta = \gamma_2$. Mit der Innenwinkelsumme ergibt sich: $180^\circ = \alpha + \beta + \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma = 2\gamma$, also $\gamma = 90^\circ$

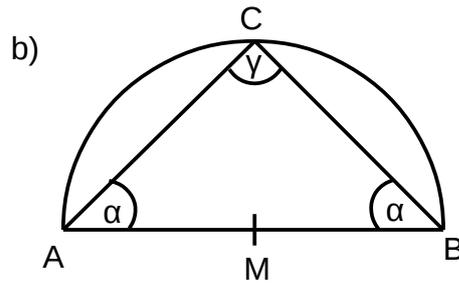
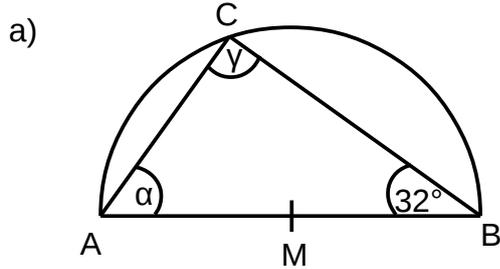
Konstruktion der Tangente:

Möchte man von einem Punkt P außerhalb eines Kreises k eine Tangente an k konstruieren, so zeichnet man einen Thaleskreis über \overline{MP} und zeichnet eine Gerade durch P und den Schnittpunkt zwischen k und Thaleskreis. Da dieser Schnittpunkt auf k liegt und senkrecht zum Radius steht, berührt diese Gerade den Kreis k, ist also die gesuchte Tangente.



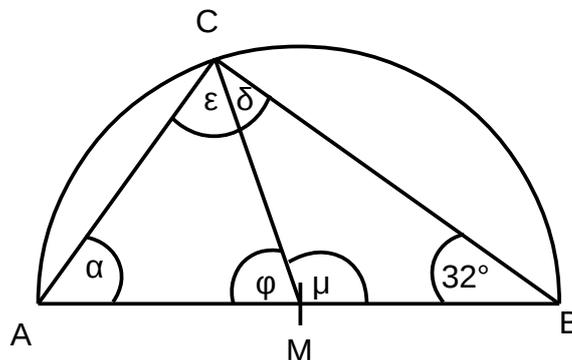
Aufgaben

1. Berechne die fehlenden Winkel



2. Konstruiere ein Dreieck ABC mit $a = 5\text{cm}$, $c = 8\text{cm}$ und $\gamma = 90^\circ$.

3. Bestimme die fehlenden Winkel und begründe jeweils.



4. Zeichne den Punkt $P(2|-2)$ und den Kreis k um $M(-1|3)$ mit Radius $r = 3\text{cm}$ in ein Koordinatensystem mit $1\text{LE} = 1\text{cm}$. Konstruiere beide Tangenten an k durch P .

5. In der angegebenen Figur sind die Geraden PC und PA jeweils Tangenten an den Kreis k um M mit Radius 2cm . Die Strecken \overline{MC} , \overline{CB} , \overline{BA} und \overline{AM} sind alle gleich lang. Bestimme folgende Größen jeweils mit Begründung

a) Winkel $\alpha = \sphericalangle PAM$

b) Streckenlänge $|\overline{BM}|$

c) Winkel $\gamma = \sphericalangle MCB$

d) Winkel $\mu = \sphericalangle AMC$

e) Winkel $\varphi = \sphericalangle CPA$

f) Für Experten (schwer!): Streckenlänge $|\overline{BP}|$ (ist in der Skizze nicht eingezeichnet)

