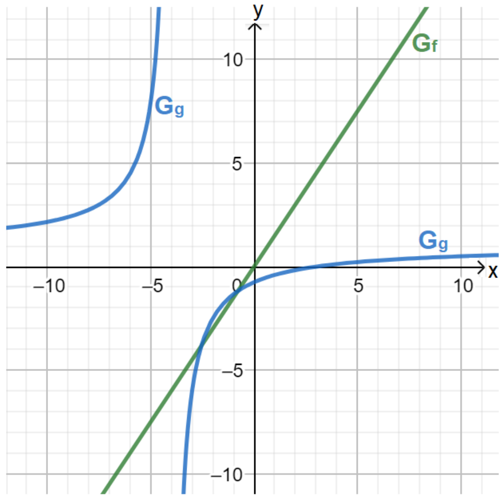
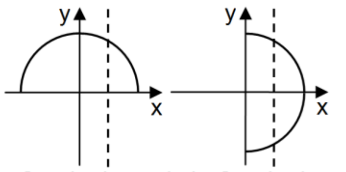
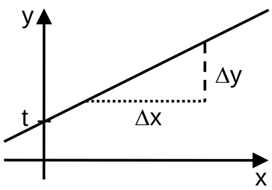
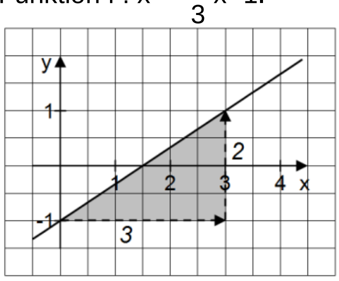
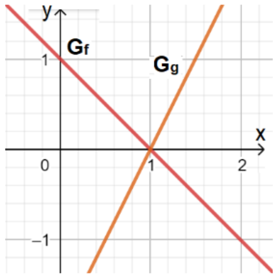
# Regiomontanus - Gymnasium Haßfurt - Grundwissen Mathematik Jahrgangsstufe 8

| Wissen und Können | Aufgaben, Beispiele, Erläuterungen |
|---|---|
| **1. Funktionen** | |
| Eine Zuordnung $x \mapsto y$, die jedem Wert für x nur einen einzigen Wert für y zuordnet, heißt **Funktion**.<br>**Funktionsvorschrift**: $f: x \mapsto a\,x + b$<br>**Funktionsterm f(x)**: $a\,x + b$<br>**Funktionsgleichung**: $f(x) = a\,x + b$ | Funktion: f, g<br>Funktionsvorschrift: $f: x \mapsto 1{,}5x$ ; $g: x \mapsto \frac{x-3}{x+4}$<br>Funktionsgleichung: $f(x) = 1{,}5x$ ; $g(x) = \frac{x-3}{x+4}$<br>Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{Q}$ ; $D_g = \mathbb{Q} \setminus \{-4\}$<br>Wertemenge: $W_f = \mathbb{Q}$ ; $W_g = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$<br>Nullstelle: $x = 0$ ; $x = 3$ |
| Die Menge aller Zahlen, für die bei einer Funktion f ein Funktionswert berechnet werden <u>kann</u>, heißt **maximale Definitionsmenge $D_{max}$** oder kurz **D**.<br>Die Menge aller Zahlen, für die bei einer Funktion f ein Funktionswert berechnet werden <u>soll</u>, heißt Definitionsmenge $D_f$.<br>Die Funktionswerte, die man durch das Einsetzen aller $x \in D_f$ erhält, bilden die **Wertemenge $W_f$**. | <br> |
| Alle Punkte P(x\|f(x)) bilden den **Graph $G_f$** der Funktion f.<br><br><br>Graph einer Funktion ; kein Graph einer Funktion | |
| **Nullstelle einer Funktion f**:<br>- Schnittstelle des Graphen $G_f$ mit der x-Achse<br>- Lösung der Gleichung $f(x) = 0$<br>Schnittpunkt des Graphen $G_f$ mit der y-Achse<br>→ $S(0 \mid f(0))$ | |
| **2. Lineare Funktionen** | |
| Funktionsgleichung: $f(x) = m\,x + t$<br>Definitionsmenge: $D = \mathbb{Q}$<br>Der Graph ist eine **Gerade** mit der **Steigung m** durch den **Punkt (0\|t)**.<br>Den Parameter t nennt man den y-**Achsenabschnitt**.<br><br><br>Es gilt: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$<br>m > 0: Die Gerade steigt von links nach rechts.<br>m < 0: Die Gerade fällt von links nach rechts.<br>m = 0: Die Gerade verläuft parallel zur x-Achse.<br>t = 0: Die Gerade geht durch den Ursprung.<br>m = 0 und t = 0: Die Gerade ist die x-Achse (y = 0) | 1: Zeichne den Graphen der Funktion $f: x \mapsto \frac{2}{3}x - 1$.<br>*Lösung:*<br>- einen Punkt eintragen, (z.B.(0\|-1))<br>- von da aus Steigungsdreieck einzeichnen „3 nach rechts, 2 nach oben"<br><br><br>2: Bestimme den Funktionsterm der Geraden g, die durch die Punkte A(3\|-1) und B(-2\|2) verläuft.<br>*Lösung:*<br>- Berechne m: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-(-1)}{-2-3} = -0{,}6$<br>- Berechne t aus $y_A = m \cdot x_A + t$: $\mathbf{-1} = -0{,}6 \cdot \mathbf{3} + t \Rightarrow t = 0{,}8$<br>- Es ergibt sich $f(x) = -0{,}6\,x + 0{,}8$ |
| Die **Lage eines Punktes bzgl. eines Funktionsgraphen $G_f$**: $P(a \mid b)$ liegt<br>- oberhalb des Graphen $G_f$, wenn $f(a) < b$ gilt,<br>- auf dem Graphen $G_f$, wenn $f(a) = b$ gilt,<br>- unterhalb des Graphen $G_f$, wenn $f(a) > b$ gilt. | Ermittle die Lage des Punktes $P(3 \mid 1)$ bezüglich des Graphen $G_f$ mit $f: x \mapsto 1{,}4x - 3$.<br>*Lösung:*<br>- Berechne f(3): $f(3) = 1{,}4 \cdot 3 - 3 = 1{,}2$<br>- $f(3) = 1{,}2 > 1$, also liegt der Punkt P unterhalb des Graphen $G_f$. |

Bestimmung des **Schnittpunkts zweier Geraden**:

- graphische Lösung:
  Geraden ins Koordinatensystem einzeichnen und Schnittpunkt ablesen (→ vgl. Punkt 5.)
- rechnerische Lösung:
  Lösen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten (→ vgl. Punkt 5.)

Ermittle den Schnittpunkt der Graphen $G_f$ und $G_g$ mit
f: $x \mapsto -x + 1$ und g: $x \mapsto 2x - 2$.




*Lösung:*
- Gleichsetzen: $-x + 1 = 2x - 2$
- Umformen:

$$-x + 1 = 2x - 2 \quad ;| +x+2$$
$$3 = 3x \quad ;| :3$$
$$1 = x$$

- $f(1) = -1 + 1 = 0$

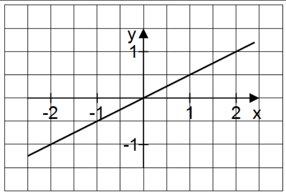
→ Schnittpunkt bei $S(1|0)$

Sonderfall: **proportionale Funktion**

Funktionsgleichung: $f(x) = m\,x$
Definitionsmenge: $D = \mathbb{Q}$
Der Graph ist eine Ursprungsgerade.

$f(x) = 0{,}5x$; $D = \mathbb{Q}$

| x | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |




**direkte Proportionalität**

Zwei Größen sind **direkt proportional**, wenn zum n-fachen der einen Größe das n-fache der anderen Größe gehört.

Direkt proportionale Größen erkennt man
- an der **Quotientengleichheit:**

  Für alle Wertepaare (x;y) gilt: $\frac{y}{x} = \text{konstant}$

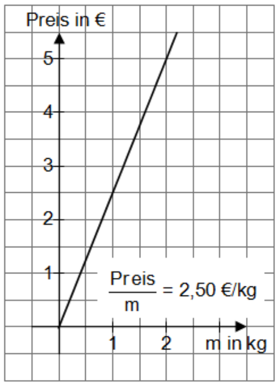
  Den Wert des Quotienten nennt man Proportionalitätsfaktor.
- am Graphen: Alle Punkte P(x|y) liegen im Koordinatensystem auf einer **Ursprungsgeraden**,

Äpfel einkaufen:

Die Größen Masse und Preis sind direkt proportional.

Proportionalitätsfaktor:
Preis pro kg (hier: 2,50 €/kg)

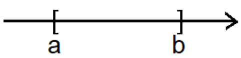
| m in kg | Preis in € |
|---|---|
| 0,1 | 0,25 |
| 0,2 | 0,50 |
| 0,5 | 1,25 |
| 1,0 | 2,50 |
| 2,0 | 5,00 |

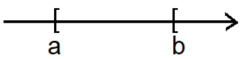


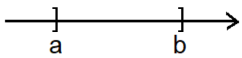

**Lineare Ungleichungen**
- graphische Lösung:
  Beide Seiten der Ungleichung werden als Terme von Funktionen interpretiert und deren Graphen gezeichnet. Aus der Skizze wird abgelesen, für welche x-Werte die Beziehung erfüllt ist.
- rechnerische Lösung durch Äquivalenzumformungen
  Achtung: Bei der Multiplikation und Division auf beiden Seiten mit einer negativen Zahl muss das Ungleichheitszeichen umgedreht werden!

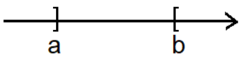
Die Lösungsmenge L einer Ungleichung kann in der Mengenschreibweise oder in der Intervallschreibweise angegeben werden.

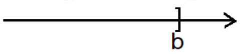
Allgemeine Bezeichnungen für Intervalle ($a, b \in \mathbb{Q}$):

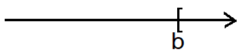
$\{x | a \le x \le b\} = [a;b]$ 

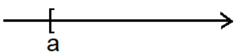

$\{x | a \le x < b\} = [a;b[$ 

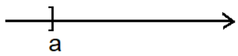

$\{x | a < x \le b\} = ]a;b]$ 


$\{x | a < x < b\} = ]a;b[$ 


$\{x | x \le b\} = ]-\infty;b]$ 

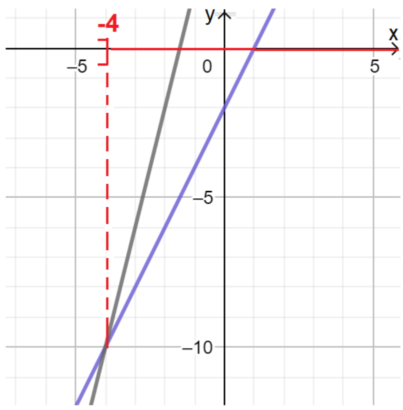

$\{x | x < b\} = ]-\infty;b[$ 


$\{x | a \le x\} = [a;\infty[$ 


$\{x | a < x\} = ]a;\infty[$ 


Bestimme rechnerisch die Lösungsmenge der Ungleichung $2(x - 1) < 4x + 6$.

*Graphische Lösung:*




*Lösung durch Äquivalenzumformungen*:

$$2(x - 1) < 4x + 6$$
$$2x - 2 < 4x + 6 \quad ;| +2$$
$$2x < 4x + 8 \quad ;| -4x$$
$$-2x < 8 \quad ;| :(-2)$$

→ Ungleichheitszeichen umdrehen!

$$x > -4$$
$$L = \{x | -4 < x\} = ]-4;\infty[$$

## 3. Gebrochen rationale Funktionen

Funktionen, deren Funktionsterm ein Bruchterm ist, nennt man **gebrochen rationale Funktionen.**

$$f: x \mapsto \frac{a}{x+b} + c$$

Ihr Graph ist eine **Hyperbel**.

Definitionsmenge: D = $\mathbb{Q}$ \{Nullstellen des Nenners}

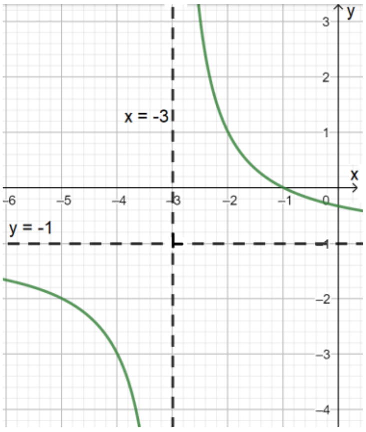
Die Nullstellen des Nenners nennt man **Definitionslücken**.

$f(x) = \frac{2}{x+3} - 1$ ; D = $\mathbb{Q}\backslash\{-3\}$

x = –3 ist die Nullstelle des Nenners, aber nicht des Zählers

→ $G_f$ hat die senkrechte Asymptote x = –3

→ $G_f$ hat die waagrechte Asymptote y = –1




Eine Gerade, der sich der Graph einer Funktion beliebig genau annähert, nennt man **Asymptote** des Funktionsgraphen.

**senkrechte Asymptote:**
Gerade mit der Gleichung x = p, wobei p eine Nullstelle des Nenners, aber nicht des Zählers ist;

**waagrechte Asymptote:**
Gerade mit der Gleichung y = c;

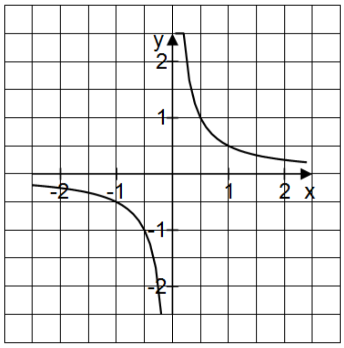
<u>Sonderfall:</u> **indirekt proportionale Funktion**

Funktionsgleichung: f(x) = $\frac{p}{x}$

Definitionsmenge: D = $\mathbb{Q}$ \ {0}
Der Graph ist eine Hyperbel.
Die beiden Koordinatenachsen sind Asymptoten.

f(x) = $\frac{0{,}5}{x} = \frac{1}{2x}$ ; D = $\mathbb{Q}$ \ {0}

| x | 0,25 | 0,5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 1 | 0,5 | 0,25 |

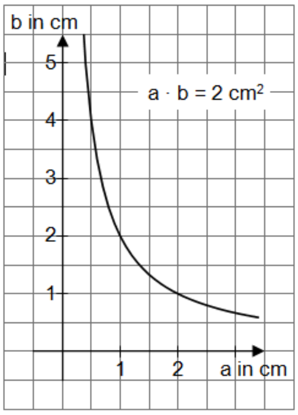



**indirekte Proportionalität**

Zwei Größen sind **indirekt proportional**, wenn zum n-fachen der einen Größe das $\frac{1}{n}$ -fache der anderen Größe gehört.

Indirekt proportionale Größen erkennt man an der **Produktgleichheit:** Für alle Wertepaare (x;y) gilt:
x · y = konstant

Alle Punkte P(x|y) liegen im Koordinatensystem auf einer **Hyperbel** mit f: x ↦ $\frac{a}{x}$ (a ≠ 0).




Die Seitenlängen a und b eines Rechtecks mit dem Flächeninhalt 2 cm² sind indirekt proportional.

| a in cm | b in cm |
|---|---|
| 0,25 | 8,0 |
| 0,50 | 4,0 |
| 1,0 | 2,0 |
| 2,0 | 1,0 |
| 4,0 | 0,50 |

**Veränderung von Hyperbeln** mit $f: x \mapsto \frac{a}{x+b} + c$

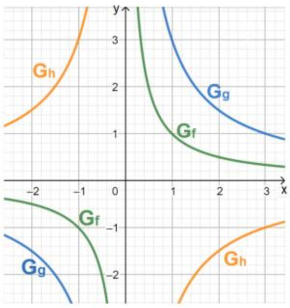
Ausgehend von der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ gilt:

- $f(x) = \frac{a}{x}$ → Streckung um |a|
  → für a < 0: zusätzlich Spiegelung an der x-Achse

- $f(x) = \frac{a}{x} + c$ → Verschiebung um |c| in y-Richtung nach oben für c > 0 bzw. unten für c < 0.
  Die Asymptoten sind bei x = 0 und y = c.

- $f(x) = \frac{a}{x+b}$ → Verschiebung um |b| in x-Richtung nach links für b > 0 bzw. rechts für b < 0.
  Die Asymptoten sind bei x = – b und y = 0.

*Beispiele:*



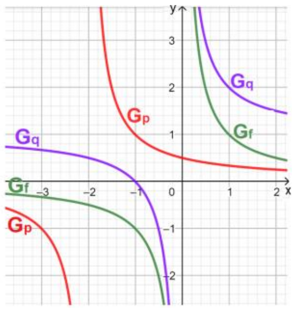

$f(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = \frac{3}{x}$

$h(x) = -\frac{3}{x}$

$p(x) = \frac{1}{x+2}$

$q(x) = \frac{1}{x} + 1$




Streckung ($G_g$) und Spiegelung ($G_h$) von $G_f$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ .

Verschiebung in y-Richtung ($G_q$) und in x-Richtung ($G_p$) von $G_f$.

## 4. Bruchterme und Bruchgleichungen

**Vereinfachen und Zusammenfassen von Bruchtermen**

Es werden die Rechenregeln für normale Brüche angewendet.

$$\frac{x+1}{x(x+1)} \underset{\frac{\cdot(x+1)}{\cdot(x+1)}\ \textit{Erweitern}}{\overset{\frac{:(x+1)}{:(x+1)}\ \textit{Kürzen}}{=}} \frac{1}{x}$$

**Beachte:**
- Die Definitionsmenge bleibt unverändert.
- Nie mit 0 kürzen oder erweitern.
- Beim Subtrahieren, Erweitern und Kürzen auf die Kammersetzung achten.

Beim **Multiplizieren** werden je beide Zähler und beide Nenner multipliziert. Beim **Dividieren** wird der vordere Bruchterm mit dem Kehrbruchterm des hinteren Bruchterms multipliziert.

1: Vereinfachen des Terms $\frac{x^2 - x}{1 - x}$

$= \frac{-x(1-x)}{1-x}$ *(Ausklammern von –x)*

$= -x$ *(Kürzen mit (1–x))*

Beachte: Es gilt immer noch $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ !

2: Zusammenfassen einer Summe $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+x} =$

$= \frac{x}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)}$ *(Hauptnenner finden: Erweitern mit bzw. Ausklammern von x)*

$= \frac{x+1}{x(x+1)}$ *(Bruchterme addieren)*

$= \frac{1}{x}$ *(Kürzen mit (x+1))*

Beachte: $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0\}$

3: Multiplikation und Division

a) $\frac{-1}{x+1} \cdot \frac{x+1}{3x} = \frac{-1\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot 3x} = \frac{-x-1}{3x^2+3x}$

b) $\frac{2}{x-3} : \frac{x}{3-x} = \frac{2}{x-3} \cdot \frac{3-x}{x} = \frac{2\cdot(3-x)}{(x-3)\cdot x} = \frac{6-2x}{x^2-3x}$

**Lösen von Bruchgleichungen**

Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren und entstandene lineare Gleichung lösen.

Nicht vergessen:
- Überprüfen, ob die Lösung der linearen Gleichung in der Definitionsmenge liegt
- Lösungsmenge angeben
- Überkreuzmultiplizieren geht nur, wenn auf beiden Seiten je nur ein Bruch steht und keine Summe.

$\frac{1}{x-7} = \frac{14}{(x-7)(x+7)}$ $\underbrace{|\cdot(x+7)(x-7)}$ $D = \mathbb{Q} \setminus \{-7; 7\}$

*Mit dem Hauptnenner multiplizieren!*

$x + 7 = 14 \Leftrightarrow x = 7 \notin D \Rightarrow L = \{\,\}$

Die Gleichung hat keine Lösung.

## 5. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Zwei lineare Gleichungen mit zwei gleichen Variablen bilden ein **lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen**.

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen haben genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen.

(I) $3x - y = 15$

(II) $2x + y = 128$

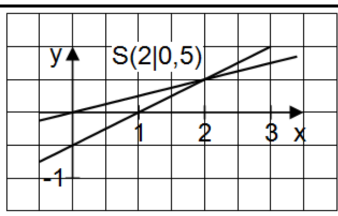
**Graphische Lösung**

Lineare Gleichung $\triangleq$ Gleichung einer linearen Funktion
- Geraden schneiden sich im Punkt S $\Rightarrow L = \{(x_S|y_S)\}$
- Geraden sind parallel $\Rightarrow L = \{\,\}$
- Geraden sind identisch $\Rightarrow L = \{(x|y)|\ y = mx + t\}$, d.h. die Lösungsmenge enthält alle Punkte der Geraden

(I) $y = 0{,}5x - 0{,}5$

(II) $y = 0{,}25x$

S(2|0,5) $\Rightarrow L = \{(2|0{,}5)\}$




**Lösung mit dem Einsetzungsverfahren**

Man löst eine Gleichung nach x bzw. y auf und setzt dann in die andere Gleichung ein.

(I) $x - 2y = 1$

(II) $x + 2y = 5$ nach x auflösen ergibt: (II') $x = 5 - 2y$

(II') in (I) $(5 - 2y) - 2y = 1 \Leftrightarrow y = 1$

y in (II) $x + 2 \cdot 1 = 5 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow L = \{(3|1)\}$

| | |
|---|---|
| **Lösung mit dem Gleichsetzungsverfahren**<br>Man formt beide Gleichungen nach einer Variablen hin um und setzt sie dann gleich. | (I) $y = 2x - 1$<br>(II) $y = -x + 1$<br>(I) = (II) $2x - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$<br>x in (II) $y = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow L = \{(\frac{2}{3} \mid \frac{1}{3})\}$ |
| **Lösung mit dem Additionsverfahren**<br>Die Gleichungen werden so umgeformt, dass die Koeffizienten von einer der beiden Variablen in beiden Gleichungen denselben Betrag haben. Durch Addition der Gleichungen wird eine Variable eliminiert und man kann die entstandene lineare Gleichung lösen. | (I) $3x - 2y = 34$<br>(II) $x + y = 128 \quad \mid \cdot 2$ ergibt: (II') $2x + 2y = 256$<br>(I) + (II') $5x = 290 \Leftrightarrow x = 58$<br>x in (II) $58 + y = 128 \Leftrightarrow y = 70 \Rightarrow L = \{(58 \mid 70)\}$ |

## 6. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

| | |
|---|---|
| $a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z})$<br>$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ | $7^0 = 1$; $(-x)^0 = 1 \qquad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$; $\frac{1}{z^{-3}} = z^{-(-3)} = z^3$<br>$\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$ |
| **Potenzgesetze** $(a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, p, q \in \mathbb{Z})$<br>1. Potenzen mit gleicher Basis:<br>$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \qquad a^p : a^q = a^{p-q}$<br>2. Potenzen mit gleichem Exponenten:<br>$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p \qquad a^p : b^p = (a : b)^p$<br>3. Potenzen von Potenzen:<br>$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$ | 1) $x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$ und $x^{-4} : x^{-6} = x^{-4-(-6)} = x^2$<br>2) $x^3 \cdot 2^3 = (x \cdot 2)^3 = (2x)^3$ und $x^4 : 2^4 = (x : 2)^4$<br>3) $(x^3)^5 = x^{3 \cdot 5} = x^{15}$ |

## 7. Zufall und Wahrscheinlichkeit

| | |
|---|---|
| Einen möglichen Versuchsausgang eines **Zufallsexperiments** nennt man **Ergebnis ω**.<br>Alle Ergebnisse fasst man im **Ergebnismenge Ω** zusammen.<br>Teilmengen des Ergebnisraums sind **Ereignisse**. Für ein Ereignis A gilt immer: $A \subset \Omega$.<br>Jedes Ereignis A hat ein Gegenereignis $\bar{A}$, welches genau die Ergebnisse aus Ω enthält, die nicht zu A gehören: $\bar{A} = \Omega \setminus A$. | In einer Urne befinden sich fünf Lose mit den Zahlen 1 bis 5. Beim Ziehen eines Loses sind die möglichen Ergebnisse 1, 2, 3, 4 oder 5 (Merkmal „Zahl“).<br>Diese bilden den Ergebnismenge Ω = {1, 2, 3, 4, 5}.<br>Ein Ereignis wäre z.B. E = {„gerade Losnummer“} = {2,4}<br>→ Das Gegenereignis dazu ist dann $\bar{E}$ = {1,3,5}<br>Die Elementarereignisse {1}, {2}, {3}, {4}, {5} haben alle die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$.<br>Dieses Zufallsexperiment ist also ein Laplace-Experiment, deshalb gilt für die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu ziehen:<br>$P(E) = \frac{2}{5} = 40\%$ |
| **Empirisches Gesetz der großen Zahlen**<br>Die relative Häufigkeit eines Ereignisses stabilisiert sich mit zunehmender Versuchsanzahl um einen festen Wert.<br>Zufallsexperimente, bei denen jedes Elementarereignis gleich wahrscheinlich ist, heißen **Laplace-Experimente**. Hat ein Laplace-Experiment n Ergebnisse, so ist deren Wahrscheinlichkeit je $\frac{1}{n}$.<br>Bei Laplace-Experimenten kann man die **Wahrscheinlichkeit P(A)** für ein Ereignis A so berechnen:<br>$P(A) = \frac{Anzahl\ der\ für\ A\ günstigen\ Ergebnisse}{Anzahl\ der\ möglichen\ Ergebnisse} = \frac{\mid A \mid}{\mid \Omega \mid}$<br>Es gilt außerdem: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ | |

**Zählprinzip**
Zieht man aus k verschiedenen Mengen mit $m_1$, $m_2$, … $m_k$ Elementen jeweils ein Element, so gibt es insgesamt $m_1 \cdot m_2 \cdot … \cdot m_k$ Möglichkeiten.

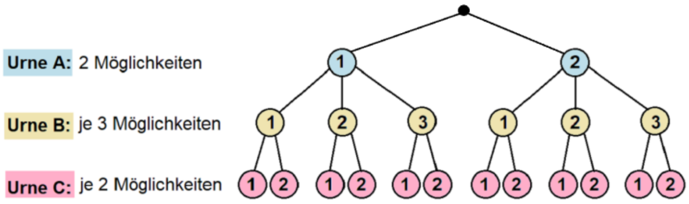
**Ziehen mit Zurücklegen**
Zieht man aus einer Urne mit m unterscheidbaren Kugeln k-mal eine Kugel und legt die gezogene Kugel nach jedem Zug wieder in die Urne zurück, so gibt es insgesamt $m \cdot m \cdot … \cdot m = m^k$ Möglichkeiten.

**Ziehen ohne Zurücklegen**
Zieht man aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln k-mal eine Kugel und legt die gezogene Kugel nicht wieder in die Urne zurück, so gibt es insgesamt $n \cdot (n – 1) \cdot (n – 2) \cdot … \cdot (n – (k+1))$ Möglichkeiten.

Zieht man alle n Kugeln, so gibt es insgesamt $n \cdot (n – 1) \cdot (n – 2) \cdot … \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten („n Fakultät").

Für die **Anordnung** von n unterscheidbaren Objekten gibt es also auch n! Möglichkeiten.

In drei Urnen mit 2 (Urne A), 3 (Urne B) und 2 (Urne C) verschiedenen Kugeln können alle möglichen Ergebnisse der Ziehung einer Kugel aus je einer Urne anhand eines Baumdiagramms dargestellt werden:




→ Es gibt $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten der Ziehung

Zieht man aus einer Urne mit 5 unterscheidbaren Kugeln drei Kugeln

a) Mit Zurücklegen → $5^3 = 75$ Möglichkeiten

b) Ohne Zurücklegen → $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten

Für die Anordnung von 5 verschiedenen Farbkugeln, gibt es insgesamt $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ Möglichkeiten.

## 8. Raumgeometrie

Bei einem **Kreis** hängt der Umfang U und der Flächeninhalt A vom Radius r ab:

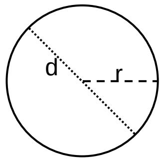
$U = 2 \cdot r \cdot \pi = d \cdot \pi$

$A = r^2 \cdot \pi$

$\pi$ heißt **Kreiszahl** und hat ungefähr den Wert 3,14.

Die Größen Umfang U und Radius r sind direkt proportional (Proportionalitätsfaktor: $2\pi$).
Die Größen Flächeninhalt A und Radius r sind weder direkt noch indirekt proportional.

1: Berechne Umfang und Flächeninhalt eines Kreises mit einem Durchmesser von 2,0 cm.



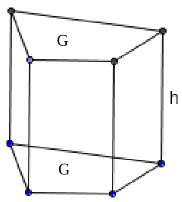

*Lösung:* $d = 2{,}0$ cm ⇒ $r = 1{,}0$ cm
$U = 2 \cdot 1{,}0 \text{ cm} \cdot \pi = 6{,}3$ cm
$A = (1{,}0 \text{ cm})^2 \cdot \pi = 3{,}1 \text{ cm}^2$

2: Wie verändern sich Umfang und Flächeninhalt eines Kreises, wenn der Radius verdreifacht wird?
*Lösung:* Der Umfang verdreifacht sich,
der Flächeninhalt verneunfacht sich.

Für ein **Prisma** und einen **Zylinder** mit der Grundfläche G, der Mantel-fläche M und der Höhe h gilt:

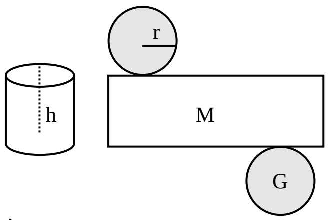
Volumen: $V = G \cdot h$

Oberflächeninhalt: $O = 2 \cdot G + M$




Speziell für einen **Zylinder** mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h gilt:

Volumen:
$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$




Inhalt der Mantelfläche:
$M = U \cdot h = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$

Oberflächeninhalt:
$O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$
$= 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$

Ein gerades Prisma, dessen Grundfläche ein achsensymmetrisches Trapez ist, hat die Maße $a = 8{,}4$ cm, $b = 6{,}2$ cm, $c = 4{,}2$ cm, $h_{Trapez} = 5{,}8$ cm und $h = 12{,}1$ cm.
Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt.

*Lösung:*
Grundfläche:

$$G = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h_{Trapez}$$

$$G = \frac{1}{2} \cdot (8{,}4 \text{ cm} + 4{,}2 \text{ cm}) \cdot 5{,}8 \text{ cm} = 36{,}5 \text{ cm}^2$$

Volumen:
$V = G \cdot h = 36{,}5 \text{ cm}^2 \cdot 12{,}1 \text{ cm} = 442 \text{ cm}^3$

Oberflächeninhalt:
$M = (a + 2b + c) \cdot h$
$M = (8{,}4 \text{ cm} + 2 \cdot 6{,}2 \text{ cm} + 4{,}2 \text{ cm}) \cdot 12{,}1 \text{ cm} = 302{,}5 \text{ cm}^2$
$O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot 36{,}5 \text{ cm}^2 + 302{,}5 \text{ cm}^2 = 375{,}5 \text{ cm}^2$