Geometrie

Lineare Abhängigkeit

Zwei Vektoren sind linear abhängig, wenn der eine Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist:

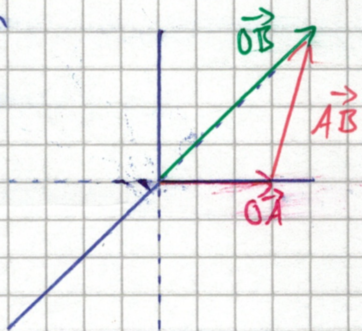
Bsp: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektoren

Ein Vektor gibt den Weg innerhalb eines Koordinatensystems an. Man kann ihn sich als Pfeil mit einer bestimmten Länge und Richtung vorstellen.

Addition und Subtraktion

- Ein Ortsvektor ist ein Punkt im Koordinatensystem der den Abstand des spezifischen Vektors vom Koordinatenursprung hat
- Ein Ortsvektor hat folgende Bezeichnung: $\overrightarrow{OA}$, wobei O für den Ursprung und A für den Punkt im Koordinatensystem steht
- Ein Vektor allgemein berechnet man, indem man den ersten Vektor vom zweiten abzieht, und zwar Zeile für Zeile



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Bsp: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA}$; $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OB} \rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-5 \\ 3-2 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Geometrie

Längenberechnung

Ziel: Die Pfeillänge eines Vektors berechnen

Definition und Berechnung:

- Die Pfeillänge eines Vektors $\vec{a}$ wird als Betrag von $\vec{a}$ bezeichnet
- Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Bsp: $P(4{,}5 \mid -3{,}2 \mid 5{,}7)$

$$|\vec{P}| = \sqrt{(-3{,}2)^2 + 4{,}5^2 + 5{,}7^2} = \sqrt{62{,}98} \approx 7{,}94$$

Ebenen im Koordinatensystem

Ziel: Feststellung, ob ein Punkt in einer bestimmten Ebene eines dreidimensionalen Koordinatensystems liegt

Berechnung:

- Punkte auf der x_1-Achse haben die Koordinaten $P(p_1 \mid 0 \mid 0)$
- Punkte auf der x_2-Achse haben die Koordinaten $P(0 \mid p_2 \mid 0)$
- Punkte auf der x_3-Achse haben die Koordinaten $P(0 \mid 0 \mid p_3)$
- Punkte in der x_2x_3-Ebene haben die Koordinaten $P(0 \mid p_2 \mid p_3)$
- Punkte in der x_1x_3-Ebene haben die Koordinaten $P(p_1 \mid 0 \mid p_3)$
- Punkte in der x_1x_2-Ebene haben die Koordinaten $P(p_1 \mid p_2 \mid 0)$

Geometrie

Geraden / Geradengleichungen

Mithilfe von Vektoren kann man Geraden im Raum beschreiben

- Jede Gerade lässt sich durch eine Gleichung der Form:

$$g: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v} \qquad \text{beschreiben}$$

- Der Vektor $\vec{p}$, ist der Ortsvektor zu einem Punkt P und liegt auf der Geraden g.
- Der Vektor $\vec{v}$ heißt Richtungsvektor

Bsp: Die Punkte A(1|-2|5) und B(4|6|-2) liegen auf der Geraden g. Bestimmen sie eine Gleichung der Geraden g

- Da A auf g liegt, ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ein möglicher Stützvektor von g
- Da A und B auf g liegen, ist der Vektor $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 6-(-2) \\ -2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$ ein möglicher Richtungsvektor von g
- Man erhält $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$

Lagebeziehung Punkt - Gerade

- Setzt man einen Punkt mit einer Geradengleichung gleich, macht man eine Punktprobe und überprüft, ob dieser Punkt auf der Geraden liegt
- Es muss ein Ergebnis für λ möglich sein

Bsp:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad A(-7|-5|8)$$

$$\vec{OA} = g \rightarrow \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -2 \rightarrow A$$

liegt auf g

Geometrie

Lagebeziehungen Gerade - Gerade

Berechnung: Zwei Geraden $g: \vec{x} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$

Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig?

ja → g parallel zu h

nein → g nicht parallel zu h

Liegt A auf h (oder B auf g)?

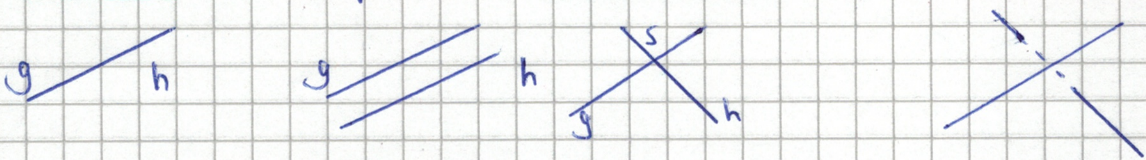
ja → $g = h$ identisch

nein → $g \parallel h$ parallel

Hat $g = h$ eine Lösung?

ja → g und h schneiden sich

nein → g und h sind windschief



Bsp:

Bestimmen sie die gegenseitige Lage der Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- linear unabhängig, denn $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \neq t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $g = h \rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -1, \mu = 1$

  ↳ g und h schneiden sich

- Setzt man $\mu = 1$ in h ein, erhält man den Ortsvektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt $P(5 \mid -5 \mid 1)$

Geometrie

Skalarprodukt

Ziel: Orthogonalität zweier Richtungsvektoren überprüfen ($\perp$)

- Das Skalarprodukt von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
- Zwei Richtungsvektoren sind zueinander orthogonal ($\vec{a} \perp \vec{b}$) wenn das Skalarprodukt 0 ergibt
- Zwei Geraden stehen orthogonal aufeinander, wenn sie sich schneiden und das Skalarprodukt 0 ergibt.

Bsp: $\vec{s} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = (-4 \cdot 2) + (1 \cdot 9) + (1 \cdot (-1)) = 0$

$\rightarrow$ Die Richtungsvektoren $\vec{s}$ und $\vec{t}$ stehen orthogonal zueinander

Schnittgerade

Der Winkel zweier Richtungsvektoren $\vec{s}$ und $\vec{t}$ ist $\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{s} \circ \vec{t}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{t}|}$

$0° \leq \alpha \leq 90°$ $\rightarrow$ $\cos^{-1}(\alpha)$

Bsp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{a} \circ \vec{b} = -3$

$|\vec{a}| = 3$ $|\vec{b}| = \sqrt{3}$

$\cos(\alpha) = \dfrac{|-3|}{3 \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\rightarrow$ $\alpha \approx 54{,}76°$

Geometrie

Abstand Punkt - Gerade

Kürzesten Punkt finden auf Gerade:

↳ Lotfußpunkt F auf Gerade g zu Punkt P

- Hilfsebene aufstellen: $P(p_1|p_2|p_3)$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Hilfsebene $H: \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right)$

- Hilfsebene H schneiden mit Gerade g → ergibt Lotfußpunkt F

$$\left.\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} \text{ nach } \lambda \text{ auflösen}$$

λ in g einsetzen ergibt Lotfußpunkt F

- Abstand zwischen P und F bestimmen → $|\vec{PF}|$

Bsp: $P(-2|1|0)$ $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1) Hilfsebene $H: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$

2) g in H $\quad \left.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} \lambda = 0{,}8$

3) λ in g $\quad \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 0{,}8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1{,}8 \\ -0{,}4 \end{pmatrix}$

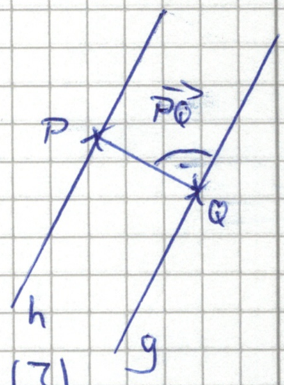
4) $d(P,F) = |\vec{PF}| = |\vec{F} - \vec{P}| = \begin{pmatrix} 5 \\ 1{,}8 \\ -0{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0{,}8 \\ -0{,}4 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \sqrt{7^2 + 0{,}8^2 + (-0{,}4)^2} = \sqrt{49{,}8}$

Geometrie

Abstand Gerade - Gerade

- Wähle beliebigen Punkt P auf Gerade h
- Weiter wie Schema Punkt - Gerade



Bsp:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

~~Punkt aus Wi~~ Punkt auswählen

Hilfsebene aufstellen: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

↳ Weiter wie Punkt - Gerade

Ebene

- Eine Ebene E wird durch den Stützvektor $\vec{p}$ und zwei linear unabhängigen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ beschrieben
- $E: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$

Bsp: Bestimmen sie eine Parametergleichung die durch die Punkte A, B und C festgelegt ist $A(1|-1|1)$; $B(1{,}5|1|0)$; $C(0|1|1)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1{,}5-1 \\ 1-(-1) \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-(-1) \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Geometrie

(Spurpunkte / -gerade) Besondere Ebenen

- x_1x_2 - Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x_3 = 0$

- x_1x_3 - Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x_2 = 0$

- x_2x_3 - Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \rightarrow x_1 = 0$

Normalenform

- Der Normalenvektor $\vec{n}$ einer Ebene steht senkrecht zur Ebene und den beiden Spannvektoren

$$\vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} \circ \vec{n} = 0$$
$$\vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u} \circ \vec{n} = 0$$

- Normalenvektor $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{u}$

- $E = \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{p})$

Bsp: $A(1|-1|1)$; $B(1,5|1|0)$; $C(0|1|1)$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Geometrie

Koordinatenform

Normalenform: $E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{A}) = 0$

Koordinatenform: $E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - (n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3) = 0$

Bsp $E: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad E: x_2 + 2x_3 - 7 = 0$

Lagebeziehung Punkt Ebene

- Punkt P liegt in Ebene E
  - Man setzt P mit der Parametergleichung gleich. Gibt es für λ und μ eine Lösung liegt P in E
  - Man setzt P für $\vec{x}$ in der Normalenform ein. Lässt sich die Gleichung lösen liegt P in E
  - Man setzt die einzelnen Koordinaten von P in die Koordinatenform. Lässt sich die Gleichung lösen liegt P in E

Lagebeziehung Gerade - Ebene

- Man setzt die Gerade g in die Normalenform für $\vec{x}$ ein und wenn es für λ
  - genau eine Lösung gibt => g und E schneiden sich
    ↳ für SP λ in g
  - genau keine Lösung gibt => g ist parallel zu E
    ↳ $0 = 9$
  - λ besitzt unendlich viele Lösungen -> g liegt in E
    ↳ $0 = 0$

Geometrie

Lageberiehungen Ebene-Ebene

$E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{A}) = 0$

$F: \vec{m} \circ (\vec{x} - \vec{B}) = 0$

Sind $\vec{n}$ und $\vec{m}$ linear abhängig?

ja → E parallel zu F

nein → E nicht parallel zu F → $E \cap F$

Liegt A in F (oder B in E)?

ja → $E = F$ identisch

nein → $E \parallel F$ parallel

$E \cap F$ E und F schneiden sich

Bsp:

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad F: -0{,}5x_1 + x_3 - 1 = 0$$

- Normalenvektoren sind linear abhängig: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Aufpunkt von E liegt nicht in F: $-0{,}5 \cdot (-2) + 3 - 1 \neq 0$

Schnittwinkel Gerade - Ebene

- Der Schnittwinkel α der Geraden g (Richtungsvektor $\vec{u}$) und Ebene E (Normalenvektor $\vec{n}$) berechnet sich: $\sin(\alpha) = \dfrac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

Schnittwinkel Ebene - Ebene

- Der Schnittwinkel α beider Ebenen (mit den jeweiligen Normalenvektoren $\vec{n}$ und $\vec{m}$) berechnet sich: $\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{n} \circ \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|}$

Geometrie

Abstand Punkt - Ebene

- Normalenvektor $\vec{n}$ -> Einheitsvektor $\vec{n_0} = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$
- Punkt P in Normalenform mit Einheitsvektor einsetzen

Bsp:

$P(3|2|1)$ $\quad E: \begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 0$

Normalenvektor normieren: $\left|\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+0^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

$\rightarrow n_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$

P in Hessesche Normalenform:

$$d(P, E) = |\vec{n_0} \circ (\vec{P} - \vec{A})| = \left|\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right| = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Abstand Gerade - Ebene

- Wähle einen beliebigen Punkt P auf Gerade g
  z.B. Aufpunkt
- Setze fort wie Schema Punkt - Ebene

Abstand Ebene - Ebene

- Wähle einen beliebigen Punkt P auf Ebene F
  z.B. Aufpunkt
- Setze fort wie Schema Punkt - Ebene

Nr 7

Besondere Lagen:

Gerade ohne Aufpunkt → Ursprungsgerade

Bsp: $g: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Geraden: im Vektor Null → ~~senkrecht zu jeweiligen~~

umgekehrt zu Ebenen

Ebenen:

Im Normalenvektor 1 mal Null → parallel zur 0-Achse

$E: 2x_2 + x_3 + 1 = 0$ → senkrecht zur Ebene

Bsp: ~~$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$~~ parallel zur x_1-Achse

senkrecht zur x_2x_3-Ebene

Im Normalenvektor 2 mal Null → parallel zur 0-Ebene

→ senkrecht zur Achse

Bsp: $E: 2x_1 = 1$ parallel zur x_2x_3-Ebene

senkrecht zur x_1-Achse