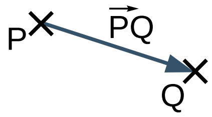
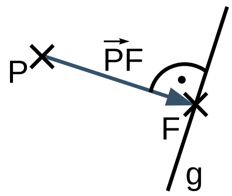
G8 Abstandsmessung im Raum

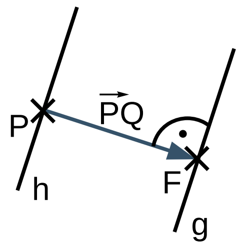
- Abstandsmessungen zwischen Punkten und Geraden sind bereits bekannt und können jeweils auf die Abstandsmessung zwischen zwei Punkten zurückgeführt werden:
  - Abstand **<u>Punkt-Punkt</u>**: $d(P,Q)=|\overrightarrow{PQ}|$



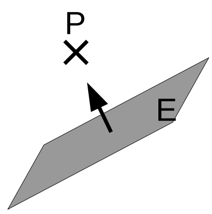
  - Abstand **<u>Punkt-Gerade</u>**: $d(P,g)=d(P,F)=|\overrightarrow{PF}|$
    - Bestimme Lotfußpunkt F auf Gerade g zum Punkt P
1. Hilfsebene H senkrecht zu Gerade g durch Punkt p
2. Hilfsebene H mit Gerade g schneiden ergibt Lotfußpunkt F
    - Dann weiter wie unter Punkt-Punkt



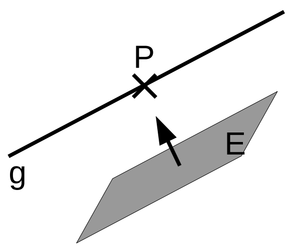
  - Abstand parallele **<u>Gerade-Gerade</u>**: $d(g,h)=d(P,h)=d(P,F)=|\overrightarrow{PF}|$
    - Wähle beliebigen Punkt P auf Gerade h
    - Dann weiter wie unter Punkt-Gerade



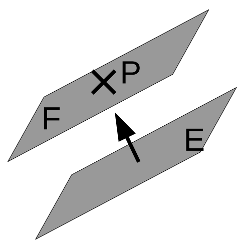
- Abstandsmessungen mit einer Ebene kann mithilfe der normierten Hesseschen Normalenform auf Abstandsmessung Punkt-Ebene zurückgeführt werden:
  - Abstand **<u>Punkt-Ebene</u>**: $d(P,E)=|\vec{n}_0 \circ (\vec{P}-\vec{A})|$ mit $E: \vec{n} \circ (\vec{X}-\vec{A})=0$
    - Normalenvektor $\vec{n}$ auf die Länge 1 normieren (Einheitsvektor): $\vec{n}_0=\frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}$
    - Punkt P in normierte Hessesche Normalenform E einsetzen



  - Abstand parallele **<u>Gerade-Ebene</u>**: $d(g,E)=d(P,E)=|\vec{n}_0 \circ (\vec{P}-\vec{A})|$
mit $E: \vec{n} \circ (\vec{X}-\vec{A})=0$
    - Wähle beliebigen Punkt P auf Gerade g
    - Dann weiter wie unter Punkt-Ebene



  - Abstand parallele **<u>Ebene-Ebene</u>**: $d(F,E)=d(P,E)=|\vec{n}_0 \circ (\vec{P}-\vec{A})|$
mit $E: \vec{n} \circ (\vec{X}-\vec{A})=0$
    - Wähle beliebigen Punkt P auf Ebene F
    - Dann weiter wie unter Punkt-Ebene



- Bestimmen Sie den Abstand zwischen den Punkten P(3|2|–1) und Q(2|0|2).

$$d(P,Q)=|\vec{PQ}|=|\vec{Q}-\vec{P}|=\left|\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}$$

- Bestimmen Sie den Abstand zwischen Punkt P(–2|1|0) und Gerade $g:\vec{X}=\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

Lotfußpunkt F ermitteln:

1. Hilfsebene aufstellen: $H:\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\circ\left(\vec{X}-\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right)=0$

2. Gerade g und Ebene H schneiden: $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\circ\left(\underbrace{\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}}_{g}-\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right)=0$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}7\\\lambda\\-2+2\lambda\end{pmatrix}=0\Rightarrow 0\cdot7+1\cdot\lambda+2\cdot(-2+2\lambda)=0$$

$$\Rightarrow\lambda-4+4\lambda=0\Rightarrow -4+5\lambda=0\Rightarrow\lambda=0{,}8$$

$$F=\underbrace{\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}+0{,}8\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}}_{g}=\begin{pmatrix}5\\1{,}8\\-0{,}4\end{pmatrix}$$

3. Abstand zwischen P und F bestimmen:

$$d(P,F)=|\vec{PF}|=|\vec{F}-\vec{P}|=\left|\begin{pmatrix}5\\1{,}8\\-0{,}4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}7\\0{,}8\\-0{,}4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{7^2+0{,}8^2+(-0{,}4)^2}=\sqrt{49{,}8}$$

- Bestimmen Sie den Abstand zwischen Geraden $g:\vec{X}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $h:\vec{X}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

Wähle beliebigen Punkt auf Gerade h, z.B. Aufpunkt P(2|1|1)
Lotfußpunkt F ermitteln:

1. Hilfsebene aufstellen: $H:\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\circ\left(\vec{X}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)=0$

2. Gerade h und Ebene H schneiden: $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\circ\left(\underbrace{\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}}_{g}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)=0$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1+\lambda\\-1\\-1+3\lambda\end{pmatrix}=0\Rightarrow 1\cdot(1+\lambda)+0\cdot(-1)+3\cdot(-1+3\lambda)=0$$

$$\Rightarrow 1+\lambda-3+9\lambda=0\Rightarrow -2+10\lambda=0\Rightarrow\lambda=0{,}2$$

$$F=\underbrace{\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+0{,}2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}}_{g}=\begin{pmatrix}3{,}2\\0\\0{,}6\end{pmatrix}$$

3. Abstand zwischen P und F bestimmen:

$$d(P,F)=|\vec{PF}|=|\vec{F}-\vec{P}|=\left|\begin{pmatrix}3{,}2\\0\\0{,}6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1{,}2\\-1\\-0{,}4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1{,}2^2+(-1)^2+(-0{,}4)^2}=\sqrt{2{,}6}$$

- Bestimmen Sie den Abstand zwischen Punkt P(3|2|1) und Ebene $E: \begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 0$

  Normalenvektor normieren: $|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+0^2+3^2} = \sqrt{25} = 5 \;\Rightarrow\; \vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$

  P in Hessesche Normalenform einsetzen:

  $$d(P,E) = |\vec{n}_0 \circ (\vec{P} - \vec{A})| = \left|\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right| = \left|\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right| = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

- Bestimmen Sie Abstand zwischen $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ und $E: \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = 0$

  Sind g und E überhaupt parallel?
  Dann sind Normalenvektor von E und Richtungsvektor von g senkrecht. => $\vec{n} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} = 4+2-6 = 0$ $\checkmark$

  Wähle beliebigen Punkt auf Gerade g, z.B. Aufpunkt P(–2|1|–4)
  Normalenvektor normieren:

  $$|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3 \;\Rightarrow\; \vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

  P in Hessesche Normalenform einsetzen:

  $$d(P,E) = |\vec{n}_0 \circ (\vec{P} - \vec{A})| = \left|\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\right| = \left|\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}\right| = \frac{6}{3} = 2$$

- Bestimmen Sie Abstand zwischen $E: \begin{pmatrix}6\\-2\\-3\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 0$ und $F: \begin{pmatrix}-6\\2\\3\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\right) = 0$

  Sind E und F überhaupt parallel?
  Dann sind Normalenvektoren parallel, also linear abhängig => $\begin{pmatrix}6\\-2\\-3\end{pmatrix} = -1\cdot\begin{pmatrix}-6\\2\\3\end{pmatrix}$ $\checkmark$

  Wähle beliebigen Punkt auf Ebene F, z.B. Aufpunkt P(3|3|3)
  Normalenvektor normieren:

  $$|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix}6\\-2\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2+(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{49} = 7 \;\Rightarrow\; \vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n} = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}6\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

  P in Hessesche Normalenform einsetzen:

  $$d(P,E) = |\vec{n}_0 \circ (\vec{P} - \vec{A})| = \left|\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}6\\-2\\-3\end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right| = \left|\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}6\\-2\\-3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}\right| = \frac{6}{7}$$