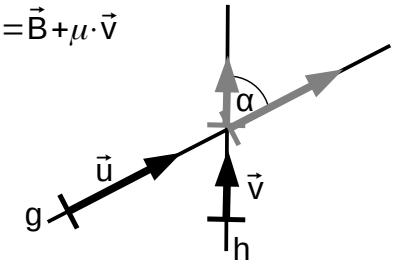
# G9 Winkelmessung im Raum

- Winkelmessungen zwischen Geraden und Ebenen werden auf Winkelmessungen zwischen Vektoren zurückgeführt:
  - Winkel zwischen zwei Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$

    Richtungsvektor von g / Richtungsvektor von h

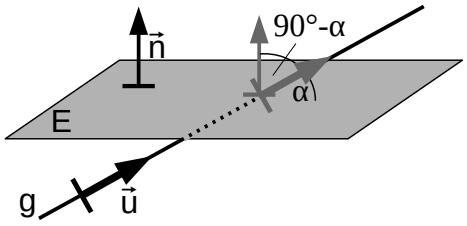
    $$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right)$$

  - Winkel zwischen Gerade $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ und Ebene $E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{B}) = 0$

    Richtungsvektor von g / Normalenvektor von E

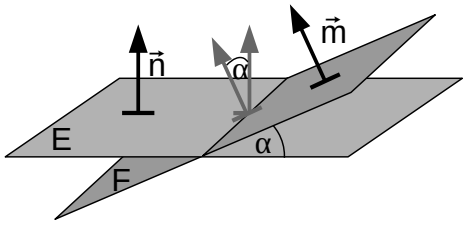
    $$\sin\alpha = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}\right)$$

  - Winkel zwischen zwei Ebenen $E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$ und $F: \vec{m} \circ (\vec{X} - \vec{B}) = 0$

    Normalenvektor von E / Normalenvektor von F

    $$\cos\alpha = \frac{|\vec{n} \circ \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n} \circ \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|}\right)$$

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Winkel zwischen den Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

und den Ebenen $E: \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$ und $F: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0$

- Winkel zwischen den Geraden g und h:
- Winkel zwischen Gerade g und Ebene E:
- Winkel zwischen Gerade g und Ebene F:
- Winkel zwischen Gerade h und Ebene E:
- Winkel zwischen Gerade h und Ebene F:
- Winkel zwischen den Ebenen E und F:

- Winkel zwischen den Geraden g und h:

$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{|\vec{u}\circ\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}\right)\approx\cos^{-1}(0{,}6325)\approx 50{,}77°$$

- Winkel zwischen Gerade g und Ebene E:

$$\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{|\vec{u}\circ\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\right|}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{11}}\right)\approx\sin^{-1}(0{,}1348)\approx 7{,}75°$$

- Winkel zwischen Gerade g und Ebene F:

$$\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{|\vec{u}\circ\vec{m}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{m}|}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right|}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}\right)\approx\sin^{-1}(0{,}9487)\approx 18{,}43°$$

- Winkel zwischen Gerade h und Ebene E:

$$\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{|\vec{v}\circ\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\right|}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{11}}\right)\approx\sin^{-1}(0)\approx 0{,}00°$$

- Winkel zwischen Gerade h und Ebene F:

$$\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{|\vec{v}\circ\vec{m}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{m}|}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right|}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right)\approx\sin^{-1}(0{,}9487)\approx 30{,}00°$$

- Winkel zwischen den Ebenen E und F:

$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}\circ\vec{m}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\left|\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{2}}\right)\approx\cos^{-1}(0{,}4264)\approx 64{,}76°$$