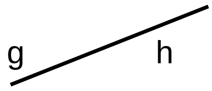
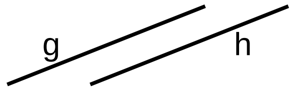
G3 Gegenseitige Lage von Geraden

Zwei Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \vec{v}$

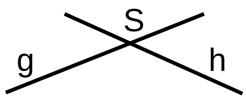
- Zwei Geraden g und h können im R³ folgende vier Lagebeziehungen zueinander haben
  - g = h sind identisch



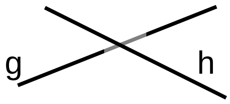
  - g || h sind (echt) parallel



  - g und h schneiden sich in einem Punkt S



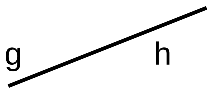
  - g und h sind windschief

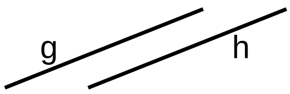


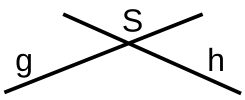
- Vorgen für die Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \vec{v}$

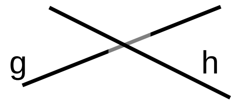
Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig?

- ja → **g parallel zu h**
  - Liegt A auf h (oder B auf g)?
    - ja → **g = h identisch**
    - nein → **g || h (echt) parallel**
- nein → **g nicht parallel zu h**
  - Hat g=h also $\vec{A} + \lambda \vec{u} = \vec{b} + \mu \vec{v}$ eine Lösung?
    - ja → **g und h schneiden sich in S**
    - nein → **g und h sind windschief**









- Beispiele: Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ zu
  - $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$
  - $m: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $n: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hinweis: Untersucht man die Lagebeziehung zweier Geraden, so müssen die Parameter unterscheidbar sein, daher verwendet man bei der zweiten Gerade den Parameter μ statt λ.

Lösungen auf nächster Seite →

- $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind identisch g = h, denn:
  - Richtungsvektoren sind linear abhängig (also parallel): $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - Aufpunkt von g liegt auf der Geraden h: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit μ = -2

- $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ sind parallel g || h, denn:
  - Richtungsvektoren sind linear abhängig (also parallel): $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$
  - Aufpunkt von g liegt nicht auf Gerade k: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ => kein μ möglich

- $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $m: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneiden sich im Punkt S(4/3/5), denn:
  - Richtungsvektoren sind linear unabhängig (also nicht parallel): $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \lightning \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - Die Gleichung g=m also $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ besitzt die Lösung λ=-1, μ=2

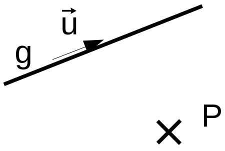
  $$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I) } 2-2\lambda=2+\mu \\ \text{II) } 4+\lambda=3 \\ \text{III) } 3-2\lambda=3+\mu \end{array} \Rightarrow \text{II) } \lambda=-1 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I) } \mu=2 \\ \\ \text{III) } \mu=2 \end{array}$$

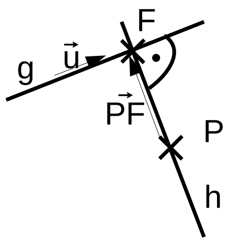
  Schnittpunkt bestimmen mit λ=-1 in g oder μ=2 in m: Schnittpunkt S(4/3/5)

- $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $n: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind windschief, denn:
  - Richtungsvektoren sind linear unabhängig (also nicht parallel): $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \lightning \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - Die Gleichung g=n also $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ besitzt keine Lösung λ, μ

  $$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I) } 2-2\lambda=3+\mu \\ \text{II) } 4+\lambda=3+\mu \\ \text{III) } 3-2\lambda=5 \end{array} \Rightarrow \text{III) } \lambda=-1 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I) } \mu=1 \\ \text{II) } \mu=0 \end{array} \lightning$$

- Besondere Aufgabe: Bestimme Lotgerade h durch Punkt P zu Gerade g
  - Die gesuchte Lotgerade h ist senkrecht zu g,
    also senkrecht zum Richtungsvektor $\vec{u} \Rightarrow h \perp g \Rightarrow \vec{PF} \perp \vec{u}$





  - Skalarprodukt zwischen zwei senkrechten Vektoren ist 0
    $h \perp g \Rightarrow \vec{PF} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{PF} \circ \vec{u} = 0$ wobei F noch unbekannt (X) ist und auf g liegt
  - Gleichung lösen und λ in g einsetzen => Lotfußpunkt F
  - Mit P und F die Geradengleichung für h bestimmen

- Beispiel: $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und P(-1/-10/3)
  - $\vec{PF} = \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}_{\vec{F}} - \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{P}} = \begin{pmatrix} 2+2\lambda \\ 10-3\lambda \\ -1 \end{pmatrix}$
  - $\vec{PF} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} 2+2\lambda \\ 10-3\lambda \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = (2+2\lambda) \cdot 2 + (10-3\lambda) \cdot (-3) + (-1) \cdot 0$
    $= 4\lambda - 30 + 9\lambda = -26 + 13\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$
  - λ=2 in Gerade g einsetzen ergibt F: $\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$
  - Mit P und F die Lotgerade h bestimmen: $h: \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot \vec{PF}$
    $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$