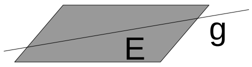
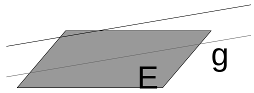
G6 Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene

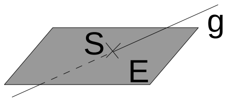
- Eine Gerade g und eine Ebene E können drei verschiedene Lagebeziehungen zueinander haben:
  - g liegt in E $\quad g \subset E$



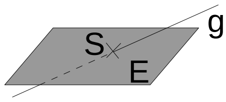
  - g ist (echt) paralle zu E $\quad g \parallel E$



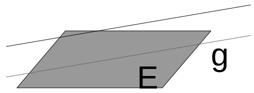
  - g schneidet E in einem Schnittpunkt S $\quad g \nparallel E$



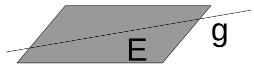
- Gerade $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ in Ebene $E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{B}) = 0$ einsetzen und Lösungen für λ finden:
  => $\underbrace{\vec{n} \circ (\underbrace{\vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}}_{g} - \vec{B}) = 0}_{E}$
  - λ besitzt <u>genau eine Lösung</u> => g und E schneiden sich: $g \nparallel E$
    (Schnittpunkt S erhält man durch Einsetzen der Lösung λ in g)



  - λ besitzt <u>keine Lösung</u> => g ist (echt) parallel zu E: $g \parallel E$
    (λ fällt raus und die Gleichung ist falsch)

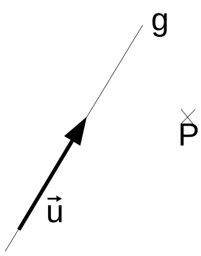


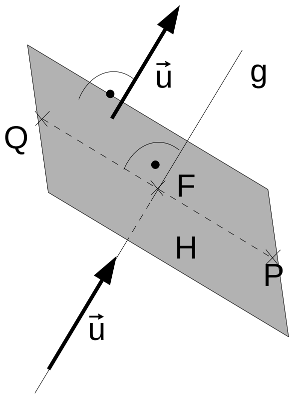
  - λ besitzt <u>unendlich viele Lösungen</u> => g liegt in E: $g \subset E$
    (λ fällt raus und die Gleichung ist wahr)



Besondere Aufgaben:

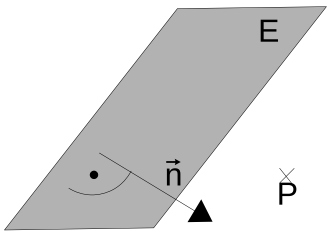
- <u>Lotfußpunkt F</u> der Lotgerade durch Punkt P
  zur Gerade $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$
  Hilfsebene $H: \vec{u} \circ (\vec{X} - \vec{P}) = 0$ mit g schneiden
  lassen ergibt als Schnittpunkt F





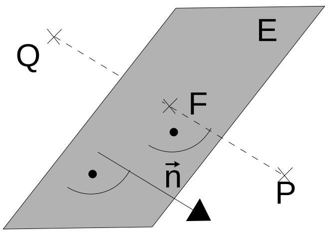
- <u>Lotgerade h</u> durch Punkt P zur Gerade $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$
  Lotfußpunkt F wie oben ermitteln, dann Gerade durch P
  und F ergibt Lotgerade $h: \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot \overrightarrow{PF}$

- <u>Spiegelpunkt Q</u> von Punkt P zur Gerade $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$
  Lotfußpunkt F wie oben ermitteln, dann $\vec{Q} = \vec{P} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$



- <u>Lotgerade h</u> durch Punkt P zur Ebene $E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{B}) = 0$
  Lotgerade $h: \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{n}$

- <u>Lotfußpunkt F</u> von Lotgerade durch Punkt P zur Ebene E
  Lotgerade h wie oben ermitteln,
  dann mit Ebene schneiden lassen ergibt F



- <u>Spiegelpunkt Q</u> von Punkt P zur Ebene E
  Lotfußpunkt wie oben ermitteln, dann $\vec{Q} = \vec{P} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$

Beispiele:

Bestimmen Sie die Lagebeziehungen der Ebene $E\colon \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right) = 0$ zu den Geraden

$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix}$ und $k\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\8\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$.

- g in E: $\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} \circ \left(\underbrace{\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{g} - \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \right) = 0$ => $\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3+\lambda \cdot \ \ 1 \ -0\\ 3+\lambda \cdot \ \ 0 \ -2\\ 1+\lambda\cdot(-1)-1\end{pmatrix} = 0$

=> $\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3+\lambda\\1\\-\lambda\end{pmatrix} = 0$ => $2\cdot(3+\lambda)+3\cdot 1+2\cdot(-\lambda)=0$

=> $6+2\lambda+3-2\lambda=0$

=> $9=0$

=> λ besitzt <u>keine Lösung</u> => g ist (echt) parallel zu E: g || E

- h in E: $\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} \circ \left(\underbrace{\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix}}_{h} - \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \right) = 0$ => $\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4+\lambda\cdot(-4)-0\\ 0+\lambda \cdot \ \ 2 \ -2\\ 0+\lambda \cdot \ \ 1 \ -1\end{pmatrix} = 0$

=> $\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4-4\lambda\\-2+2\lambda\\-1+\lambda\end{pmatrix} = 0$ => $2\cdot(4-4\lambda)+3\cdot(-2+2\lambda)+2\cdot(-1+\lambda)=0$

=> $8-8\lambda-6+6\lambda-2+2\lambda=0$

=> $0=0$

=> λ besitzt <u>unendlich viele Lösung</u> => h liegt in E: $h \subset E$

- k in E: $\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} \circ \left(\underbrace{\begin{pmatrix}3\\8\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}}_{k} - \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \right) = 0$ => $\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3+\lambda\cdot 1-0\\ 8+\lambda\cdot 3-2\\ 2+\lambda\cdot 1-1\end{pmatrix} = 0$

=> $\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4-4\lambda\\-2+2\lambda\\-1+\lambda\end{pmatrix} = 0$ => $2\cdot(3+\lambda)+3\cdot(6+3\lambda)+2\cdot(1+\lambda)=0$

=> $6+2\lambda+18+9\lambda+2+2\lambda=0$

=> $26+13\lambda=0$

=> $\lambda=-2$

=> λ besitzt <u>genau eine Lösung</u> => k und E schneiden sich in S

mit S: $\lambda=-2$ in k: $\vec{S} = \begin{pmatrix}3\\8\\2\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ => S(1|2|0)

- Ermitteln Sie den Lotfußpunkt F der Lotgerade durch Punkt P(4|4|4) zur Gerade
  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  1. Hilfsebene H bestimmen, die senkrecht zu g steht und durch P läuft:

  $$H: \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 0$$

  2. Hilfsebene $H: \vec{u} \circ (\vec{X} - \vec{P}) = 0$ mit g schneiden lassen ergibt als Schnittpunkt F

  g in H einsetzen: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 0$ => $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} -2-\lambda \\ -3 \\ -4+\lambda \end{pmatrix} \right) = 0$

  => $2 + \lambda - 4 + \lambda = 0$ => $2\lambda - 2 = 0$ => $2\lambda = 2$ => $\lambda = 1$

  $\lambda = 1$ in Gerade g einsetzen: $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ => Lotfußpunkt F(1|1|1)

- Ermitteln Sie die Lotgerade h durch Punkt P(4|4|4) zur Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  1. Lotfußpunkt F ermitteln, wie oben => Lotfußpunkt F(1|1|1)

  2. Lotgerade h ist die Gerade durch die Punkt P und F:

  $h = PF \Rightarrow h: \vec{X} = \vec{P} + \mu \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$, besser: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Ermitteln Sie den Spiegelpunkt Q von Punkt P(4|4|4) zur Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  1. Lotfußpunkt F wie oben ermitteln => Lotfußpunkt F(1|1|1)

  2. dann $\vec{Q} = \vec{P} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}$

  Q(-8|-8|-8) ist Spiegelpunkt von P zur Gerade g

- Ermitteln Sie die <u>Lotgerade h</u> durch Punkt P(2|0|–7) zur Ebene $E:\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\circ\left(\vec{X}-\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right)=0$

=> Lotgerade $h:\vec{X}=\vec{P}+\lambda\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\0\\-7\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

- Ermitteln Sie den <u>Lotfußpunkt F</u> der Lotgerade h durch Punkt P(2|0|–7) zur Ebene $E:\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\circ\left(\vec{X}-\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right)=0$

1. Lotgerade h ermitteln, wie oben => Lotgerade $h:\vec{X}=\begin{pmatrix}2\\0\\-7\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

2. Lotgerade h mit Ebene E schneiden lassen ergibt Lotfußpunkt F

h in E einsetzen: $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}2\\0\\-7\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right)=0$ => $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\-2+\lambda\\-6+3\lambda\end{pmatrix}=0$

=> $-2+\lambda-18+9\lambda=0$ => $-20+10\lambda=0$ => $10\lambda=20$ => $\lambda=2$

$\lambda=2$ in h: $\vec{F}=\begin{pmatrix}2\\0\\-7\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ => Lotfußpunkt F(2|2|-1)

- Ermitteln Sie den <u>Spiegelpunkt Q</u> von Punkt P(2|0|–7) zur $E:\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\circ\left(\vec{X}-\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right)=0$

1. Lotfußpunkt wie oben ermitteln => Lotfußpunkt F(2|2|-1)

2. dann $\vec{Q}=\vec{P}+2\cdot\overrightarrow{PF}=\begin{pmatrix}2\\0\\-7\end{pmatrix}+2\cdot\left(\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\-7\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$ => Spiegelpunkt Q(2|4|5)